**Bolyai János**
**Matematikai Társulat**

# Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

# 2020/2021-es tanév

## Haladók II. kategória 2. forduló

### Megoldások és javítási útmutató

**1.** Az $A = \{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$ halmaznak hány olyan nemüres részhalmaza van, amelyben az elemek szorzata osztható az $A$ halmaz minden elemével? **7 pont**

**Megoldás.** Az 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10 számok legkisebb közös többszöröse $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$. Minden, a feltételnek megfelelő $H$ részhalmazban lévő számok szorzata osztható kell legyen a $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ szorzattal, ezért a 7 biztos eleme $H$-nak.

Minden olyan $H$ részhalmaz megfelel, amelynek eleme a 7, a 8, a 9, valamint az 5 és a 10 közül legalább az egyik. Ezeknek a száma $2^5 \cdot 3 = 96$, hiszen a többi öt szám (1, 2, 3, 4 és a 6) közül bármelyik lehet is eleme $H$-nak, meg nem is. 1 pont

Ha egy megfelelő $H$ halmaznak eleme a 7 és a 8, de nem eleme a 9, akkor – hogy a szorzatban meglegyen a két 3-as prímtényező – benne kell legyen a 3 és a 6 is, valamint az 5 és a 10 közül legalább az egyik. Az ilyen részhalmazok száma $2^3 \cdot 3 = 24$, mivel ekkor az 1, 2 és 4 számok helye bizonytalan, azaz közülük bármelyik lehet is eleme $H$-nak, meg nem is. 1 pont

Ha egy megfelelő $H$ halmaznak eleme a 7 és a 9, de nem eleme a 8, akkor – hogy a szorzatban meglegyen a három 2-es és az egy 5-ös prímtényező is – a következő lehetőségek vannak:

*a)* Ha $H$-nak nem eleme a 10, akkor az 5 biztosan eleme, a 2-hatványok miatt pedig 2 eset van:

*a/1)* Mind a három 8-tól és 10-től különböző páros szám, azaz a 2, 4 és 6 is eleme $H$-nak. Ekkor csak az 1 és a 3 helye bizonytalan, ezért ebből a fajta részhalmazból $2^2 = 4$ darab van.

*a/2)* A 2, 4, és 6 közül valamelyik kettő eleme $H$-nak, egy kimarad belőle. Ekkor a kettő közül az egyik a 4 kell legyen, a másik a 2 és a 6 valamelyike. Ilyen részhalmazból $2 \cdot 2^2 = 8$ darab van, hiszen mindkét esetben csak az 1 és a 3 helye bizonytalan. 1 pont

*b)* Ha $H$-nak eleme a 10, akkor a 2-hatványok miatt 3 eset van:

*b/1)* Mind a három 8-tól és 10-től különböző páros szám, azaz a 2, 4 és 6 is eleme $H$-nak. Ekkor csak az 1, a 3 és az 5, ami $H$-nak lehet is eleme, meg nem is, ezért ebből a fajta részhalmazból $2^3 = 8$ darab van.

*b/2)* A 2, 4, és 6 közül valamelyik kettő eleme $H$-nak, egy kimarad belőle. Ilyen részhalmazból $3 \cdot 2^3 = 24$ darab van, hiszen mindhárom esetben az 1, a 3 és az 5 helye bizonytalan.

*b/3)* A 2, 4, és 6 közül pontosan egy eleme a $H$-nak. Ekkor ez biztosan a 4 – mert a 10 mellé még két darab 2-es faktor kell –, így ilyen részhalmazból $2^3 = 8$ darab van, hiszen ismét az 1, a 3 és az 5 helye bizonytalan. 2 pont

Ha egy megfelelő $H$ halmaznak eleme a 7, de sem a 8, sem a 9 nem eleme, akkor a 3 és a 6 biztosan eleme, így a két 3-as prímtényező és egy 2-es prímtényező biztosítva van. Ekkor – hogy a még hiányzó két 2-es és az egy 5-ös prímtényező is benne legyen a $H$-beli elemek szorzatában – a következő lehetőségek vannak:

*a)* Ha $H$-nak nem eleme a 10, akkor az 5 biztosan eleme, valamint a maradék párosak (tehát a 2 és a 4) közül vagy mindkettő, vagy csak a 4 eleme $H$-nak. Ilyen részhalmazból $2 \cdot 2 = 4$ darab van, hiszen mindkét esetben csak az 1 helye bizonytalan.

*b)* Ha $H$-nak eleme a 10, akkor a 2 és a 4 közül legalább az egyik eleme $H$-nak. Ilyen részhalmazból $3 \cdot 2^2 = 12$ darab van, hiszen mindhárom esetben az 1 és az 5 helye bizonytalan. 1 pont

Tehát az összes megfelelő részhalmazok száma: $96+24+4+8+8+24+8+4+12 = 188$. 1 pont

**Összesen:** **7 pont**

**2.** Legyen minden $k$ pozitív egész szám esetén $H_k$ azoknak a természetes számoknak a halmaza, amelyek $(k+1)$-gyel osztva $k$ maradékot adnak.

*a)* Ezek közül a halmazok közül hánynak eleme a 2021?

*b)* Van-e olyan természetes szám, ami az adott $H_k$ halmazok közül pontosan 2021 darab halmaznak eleme? **7 pont**

**Megoldás.** *a)* A kérdés a következő: Hány $k$-hoz van olyan $x$ természetes szám, hogy teljesül a $(k+1)x+k = 2021$ egyenlet? 1 pont

Kissé alakítva a $(k+1)(x+1) = 2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$ egyenletet kapjuk. 1 pont

Tehát $k+1$ a 2022-nek osztója, és $k+1$ legalább 2. A 2022-nek nyolc osztója van, egyik az 1, ezért $k+1$ értéke 7-féle lehet, tehát hét halmaznak eleme a 2021. 1 pont

*b)* Az $n$ szám annyi halmaznak eleme, ahány $(k;x)$, $k > 1$, $k \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{N}$, számpár igazzá teszi a $(k+1)x+k = n$, azaz $(k+1)(x+1) = n+1$ egyenletet. 1 pont

A $k+1$ szám az $(n+1)$-nek 1-nél nagyobb osztója. 1 pont

Tehát ha $(n+1)$-nek 2021 darab 1-nél nagyobb osztója van, azaz 2022 osztója van, akkor az $n$ szám 2021 halmaznak eleme. 1 pont

Tehát olyan számot kell keresni, aminek 2022 darab pozitív osztója van. Ilyen például a $2^{2021}$, tehát az $n = 2^{2021}-1$ szám a $H_k$ halmazok közül éppen 2021 darab halmaznak eleme. 1 pont

**Összesen:** **pont**

**3.** Oldjuk meg a valós számok legbővebb részhalmazán.

$$\sqrt{\frac{5}{x+2}-1}+\sqrt{\frac{5}{3-x}-1}=\sqrt{\left(2-\left|x-\frac{1}{2}\right|\right)^2}$$ **7 pont**

**Megoldás.** A bal oldalon lévő kifejezések nevezője miatt $x \neq -2;\ 3$.

Alakítsuk át a gyök alatti kifejezéseket:

$$\frac{5}{x+2}-1=\frac{5-x-2}{x+2}=\frac{3-x}{x+2}$$
$$\frac{5}{3-x}-1=\frac{5-3+x}{3-x}=\frac{x+2}{3-x}$$ 1 pont

A nevezőket is figyelembe véve ezek a kifejezések akkor lesznek pozitívak, ha $-2<x<3$. 1 pont

Vegyük észre, hogy a bal oldalon két olyan pozitív szám összege áll, amelyek egymás reciprokai. Ezek összegéről tudjuk, hogy legalább kettő, 1 pont

valamint, hogy a szélsőértékét (a kettőt) akkor veszi fel, ha a két szám egyenlő, 1 pont

amiből

$$\frac{3-x}{x+2}=\frac{x+2}{3-x}$$
$$(3-x)^2=(x+2)^2$$

(a feltétel miatt pozitív számok négyzetei)

$$3-x=x+2$$
$$x=\frac{1}{2}$$

következik. Tehát a bal oldal minimuma 2, és ezt az $x=\frac{1}{2}$ esetben veszi fel. 1 pont

A jobb oldali kifejezést átalakítva:

$$\sqrt{\left(2-\left|x-\frac{1}{2}\right|\right)^2}=\left|2-\left|x-\frac{1}{2}\right|\right|\leq 2.$$

Tehát a jobb oldal maximum 2, amit az $x=\frac{1}{2}$ helyen vesz fel. 1 pont

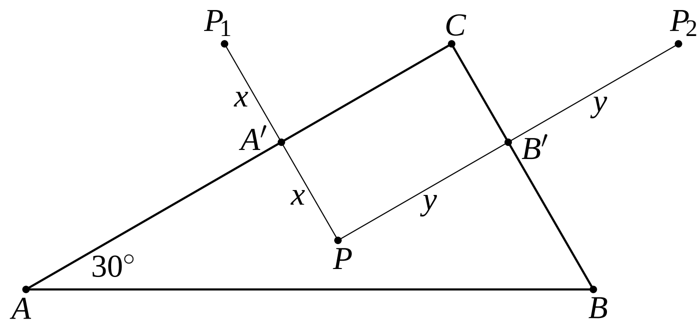
Így az egyenletnek akkor van megoldása, ha mindkét oldal 2, és ez csak az $x=\frac{1}{2}$ esetben teljesül. 1 pont

**Összesen:** **7 pont**

**4.** Az $ABC$ derékszögű háromszög átfogója $AB = 2$, egyik hegyesszöge $30^\circ$. Mi azon $P$ pontok halmaza a háromszögben és kerületén, amelyeket a befogókra tükrözve az $AP_1P_2B$ négyszög trapéz lesz? Milyen értéket vehet fel e trapézok területe? **7 pont**

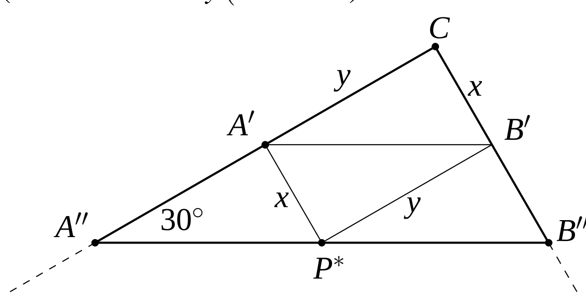
**Megoldás. 1. eset:** ha $AB \parallel P_1P_2$.

Tükrözzük a háromszög egy tetszőleges $P$ pontját a befogókra.




Ekkor a tükrözés tulajdonságai miatt $A'PB'C$ téglalap, valamint a $C$ pont illeszkedik a $P_1P_2$ szakaszára. $P_1P_2 \parallel AB$ akkor áll fenn, ha $P_1PP_2$ középvonala ($A'B'$) is párhuzamos az átfogóval. Ebből pedig az következik, hogy $ABC\triangle \sim A'B'C\triangle$, vagyis $x : y = 1 : \sqrt{3}$. 1 pont

Tetszőleges ilyen arányú ($CB' : CA' = x : y (= 1 : \sqrt{3})$ szakaszokat mérve fel a $C$ csúcstól,




így a tükrözött $P^*$ pont az $A''B''C$ háromszög ($A''B'' \parallel AB$) átfogójának felezőpontja lesz. (Pl. a versenyző hivatkozik az egybevágó háromszögekre.) Ez azt jelenti, hogy a $P$ pontok mértani helye a súlyvonal lesz. 1 pont

A legnagyobb területű trapézt akkor kapjuk, ha a $P_1P_2$ szakasz hossza a legnagyobb (vagyis $A'B'$ a legnagyobb). Ez a két tulajdonság egyszerre teljesül akkor, ha a $P$ az átfogó felezőpontja.

Ekkor a trapéz területe:

$$T = \frac{AB + P_1P_2}{2} \cdot m_c = \frac{2+2}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$ 1 pont

A legkisebb terület viszont akkor keletkezik, amikor a $P_1P_2$ szakasz hossza nulla, vagyis a $P$ a $C$ ponttal azonos. Ekkor a háromszöggé fajuló trapéz területe:

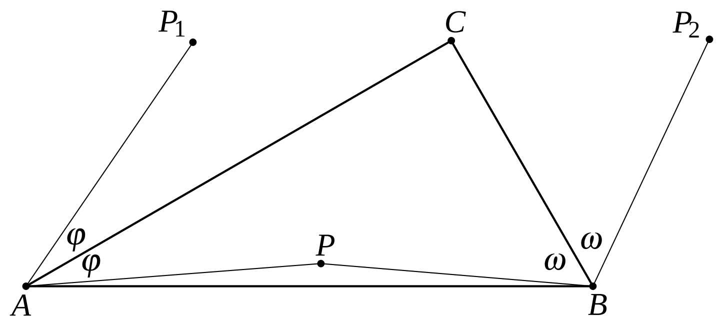
$$T = \frac{AB + P_1P_2}{2} \cdot m_c = \frac{2+0}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$ 1 pont

A terület legalább $\frac{\sqrt{3}}{2}$ és legfeljebb $\sqrt{3}$. 1 pont

**Megjegyzés.** Az is elfogadható, ha valaki az alsó becslésnél az egyenlőséget nem engedi meg.

**2. eset:** ha $AP_1 \parallel BP_2$.

Ekkor a $PAC\sphericalangle = CAP_1\sphericalangle$, valamint a $PBC\sphericalangle = CBP_2\sphericalangle$ teljesül. Mivel $\varphi \leq 30^\circ$ és $\omega \leq 60^\circ$,

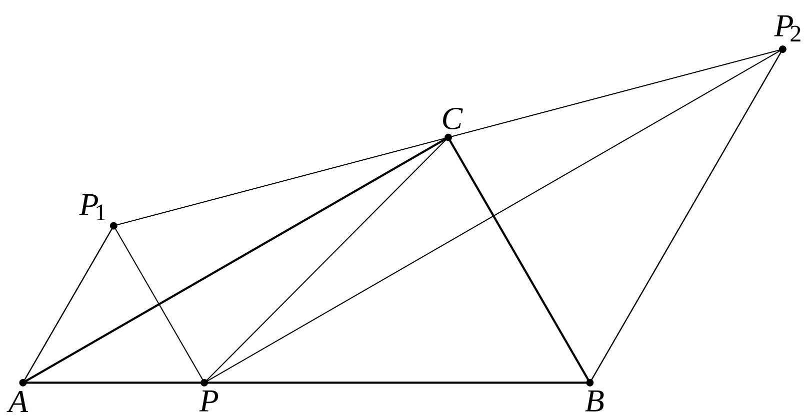



így a párhuzamosság következtében

$$\underbrace{30^\circ + \varphi}_{\leq 60^\circ} = \underbrace{180^\circ - 60^\circ - \omega}_{60^\circ \leq}$$

Az egyenlőség, vagyis a párhuzamosság feltétele, hogy $P$ rajta van az átfogón. 1 pont

Ekkor a keresett trapéz területe (a tükrözött háromszögeket figyelembe véve) éppen az adott háromszög területének kétszerese.




Tehát ebben az esetben a $P$ pont az átfogó tetszőleges pontja lehet, s területe minden esetben $\sqrt{3}$. 1 pont

**Összesen:** **7 pont**