Haladók III. kategória 2. (döntő) forduló

Feladatok

1. Legyenek x, y és z nullától és egymástól páronként különböző valós számok.

a) Bizonyítsuk be, hogy ha x, y és z pozitívak, továbbá $x+\frac{1}{y}$, $y+\frac{1}{z}$, $z+\frac{1}{x}$ és xyz mindegyike racionális, akkor x, y és z is racionális számok.

b) Bizonyítsuk be, hogy ha $x+\frac{1}{y}$, $y+\frac{1}{z}$, $z+\frac{1}{x}$ és xyz mindegyike racionális, de nem feltétlenül pozitívak, akkor x, y és z lehetnek irracionális számok is. **7 pont**

2. Az $ABCD$ négyszögben $DAB\sphericalangle = ABC\sphericalangle = 110^\circ$, $BCD\sphericalangle = 35^\circ$, $ADC\sphericalangle = 105^\circ$ és az AC átló felezi a $DAB\sphericalangle$-et. Határozzuk meg az $ABD\sphericalangle$ nagyságát! **7 pont**

3. A pozitív egész számok a_1, a_2, $\ldots$ sorozatát „hexadecimálisnak” nevezzük, ha bármely nyolc egymást követő tag összege legfeljebb 16, vagyis bármely $i \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$a_i + a_{i+1} + \ldots + a_{i+7} \leq 16.$$

Egy m pozitív egész számot „vágáshossznak” nevezzük, ha minden hexadecimális sorozat néhány egymást követő tagjának összege m, azaz léteznek olyan $k \leq l$ ($k, l \in \mathbb{N}^+$) számok, amelyekre

$$\sum_{i=k}^{l} a_i = m.$$

Határozzuk meg m összes lehetséges értékét, vagy bizonyítsuk be, hogy m egyetlen pozitív egész értéket sem vehet fel! **7 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Legyenek x, y és z nullától és egymástól páronként különböző valós számok.

a) Bizonyítsuk be, hogy ha x, y és z pozitívak, továbbá $x+\frac{1}{y}$, $y+\frac{1}{z}$, $z+\frac{1}{x}$ és xyz mindegyike racionális, akkor x, y és z is racionális számok.

b) Bizonyítsuk be, hogy ha $x+\frac{1}{y}$, $y+\frac{1}{z}$, $z+\frac{1}{x}$ és xyz mindegyike racionális, de nem feltétlenül pozitívak, akkor x, y és z lehetnek irracionális számok is. **7 pont**

Megoldás.

a) $x+\frac{1}{y}=p$, $y+\frac{1}{z}=q$, $z+\frac{1}{x}=r$, $xyz=s$, ahol p, q, r és s racionális számok, sőt, mivel x, y és z pozitívak, ezért nyilván p, q és r is pozitívak.

Az első két egyenletet összeszorozva:

$$\left(x+\frac{1}{y}\right)\left(y+\frac{1}{z}\right)=pq$$

$$xy+\frac{x}{z}+1+\frac{1}{yz}=pq$$ 1 pont

Szorozzuk meg z-vel mindkét oldalt

$$xyz+x+z+\frac{1}{y}=pqz$$

$$s+p+z=pqz$$

$$s+p=z(pq-1)$$ 1 pont

Két eset van.

1. eset: Tegyük fel, hogy $pq\neq 1$, ekkor $s+p$ nem lehet 0, hiszen $pq-1\neq 0$, z pedig a feladat feltétele szerint nem nulla.

Tehát $z=\frac{s+p}{pq-1}$, ezért z racionális (hiszen a racionális számok halmaza zárt a négy alapműveletre). 1 pont

Akkor pedig $\frac{1}{z}$ is racionális.

Így $y=q-\frac{1}{z}$ is racionális, $\frac{1}{y}$ is racionális, és $x=p-\frac{1}{y}$ is racionális. 1 pont

2. eset: Ha $pq=1$, akkor $s+p=0$.

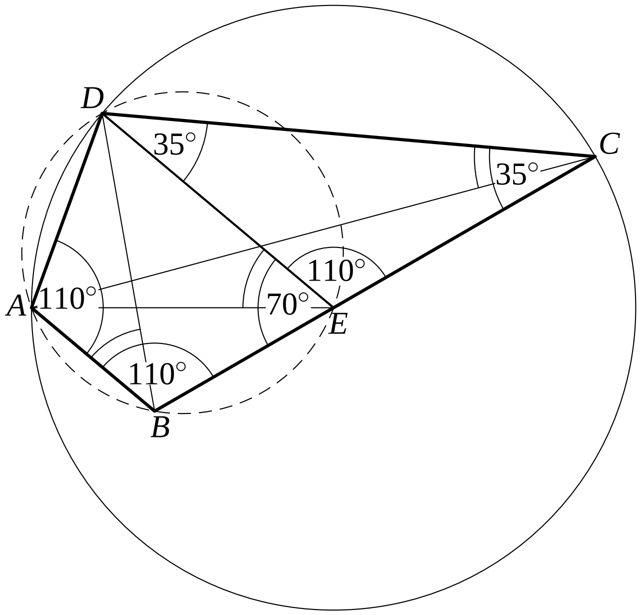
Ez ellentmond annak, hogy p és s pozitív számok, így ez az eset nem valósulhat meg. 1 pont

b) Például $x=\sqrt{2}$, $y=-\sqrt{2}-1$ és $z=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$. 2 pont

Összesen: **7 pont**

2. Az $ABCD$ négyszögben $DAB\sphericalangle=ABC\sphericalangle=110^\circ$, $BCD\sphericalangle=35^\circ$, $ADC\sphericalangle=105^\circ$ és az AC átló felezi a $DAB\sphericalangle$-et. Határozzuk meg az $ABD\sphericalangle$ nagyságát! **7 pont**

Megoldás. Legyen az E a BC oldal azon pontja, amelyre $DE\parallel AB$. 1 pont



Mivel $DAB\sphericalangle = ABE\sphericalangle = 110^\circ$, ezért az $ABED$ négyszög szimmetrikus trapéz, körbe írható, a DE oldalon fekvő szögei 70°-osak, és $ABD\sphericalangle = AED\sphericalangle$. 1 pont

Továbbá $ADC\sphericalangle = 105^\circ$, $EDA\sphericalangle = 70^\circ$, ezért $CDE\sphericalangle = 35^\circ$.

Így a DCE háromszög egyenlő szárú, és $EC = ED$. 1 pont

Mivel $DAC\sphericalangle = \frac{1}{2}DAB\sphericalangle = \frac{1}{2}DEC\sphericalangle$, ezért A rajta van az E középpontú, $EC = ED$ sugarú körön, és így

$$AED\sphericalangle = 2 \cdot ACD\sphericalangle.$$ 1 pont

Az ACD háromszögben $ACD\sphericalangle = 180^\circ - DAC\sphericalangle - ADC\sphericalangle = 180^\circ - 55^\circ - 105^\circ = 20^\circ$. 1 pont

A kerületi és középponti szögek tétele alapján $AED\sphericalangle = 2 \cdot ACD\sphericalangle = 2 \cdot 20^\circ = 40^\circ$, ami korábbi megállapításunk alapján azt jelenti, hogy a $ABD\sphericalangle$ is 40°-os. 1 pont

Összesen: **7 pont**

3. A pozitív egész számok a_1, a_2, $\ldots$ sorozatát „hexadecimálisnak” nevezzük, ha bármely nyolc egymást követő tag összege legfeljebb 16, vagyis bármely $i \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$a_i + a_{i+1} + \ldots + a_{i+7} \leq 16.$$

Egy m pozitív egész számot „vágáshossznak” nevezzük, ha minden hexadecimális sorozat néhány egymást követő tagjának összege m, azaz léteznek olyan $k \leq l$ ($k, l \in \mathbb{N}^+$) számok, amelyekre

$$\sum_{i=k}^{l} a_i = m.$$

Határozzuk meg m összes lehetséges értékét, vagy bizonyítsuk be, hogy m egyetlen pozitív egész értéket sem vehet fel! **7 pont**

Megoldás. Először azt fogjuk belátni, hogy $16 \mid m$. Meg fogjuk mutatni, hogy $16 \nmid m$ esetén nem létezik megfelelő m érték.

a) m nem lehet páratlan szám.

A kettesekből álló 2, 2, 2, 2, $\ldots$ hexadecimális sorozatot tekintve látható, hogy minden vágáshossz páros szám.

b) m nem lehet 4-gyel osztva 2 maradékot adó pozitív egész szám, mert a 3, 1 számok periodikus ismétlésével felépített 3, 1, 3, 1, 3, 1, $\ldots$ sorozat páros sok egymást követő tagjának összege mindig osztható néggyel, míg páratlan sok szomszédos tagjának összege páratlan szám.

c) Hasonlóképpen m nem lehet 8-cal osztva 4 maradékot adó pozitív egész szám sem. Ezt igazolja pl. az 5, 1, 1, 1 számok periodikus ismétlésével felírt 5, 1, 1, 1, 5, 1, 1, 1, ... sorozat.

d) Végül m nem lehet 16-tal osztva 8 maradékot adó pozitív egész szám sem. Erre megfelelő ellenpéldát szolgáltat pl. a 9, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 számok periodikus ismételgetésével adódó 9, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 9, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, ... sorozat. 2 pont

Ezután igazolni fogjuk, hogy ha $16 \mid m$, akkor tetszőleges hexadecimális sorozat tartalmaz néhány olyan egymást követő tagot, melyek összege m.

Legyen $m = 16n$ $(n \in \mathbb{N}^+)$.

Tekintsük először azokat a hexadecimális sorozatokat, amelyeknél bármely 8 egymást követő tag összege 16, vagyis bármely $i \in \mathbb{N}^+$ esetén $a_i + a_{i+1} + \ldots + a_{i+7} = 16$.

Nevezzük az ilyen sorozatokat „maximálisnak”.

Ekkor egy ilyen maximális sorozat első $8n$ tagjának összege $a_1 + a_2 + \ldots + a_{8n} = 16n = m$, vagyis m előáll egymást követő tagok összegeként. 1 pont

Ezután vizsgáljuk meg a „nem maximális” sorozatokat. Tetszőleges $i \in \mathbb{N}^+$ esetén jelöljük a sorozat első i tagjának összegét S_i-vel. Mivel a sorozat elemei pozitív egészek, ezért az S_i-k pozitív egészekből álló szigorúan monoton növekvő sorozatot alkotnak.

Szeretnénk olyan $i < j$ $(i, j \in \mathbb{N}^+)$ indexeket találni, amelyekre $S_j - S_i = m$, mert ez azt jelentené, hogy $a_{i+1} + \ldots + a_j = m$.

Mivel sorozatunk nem maximális, ezért létezik olyan $k \in \mathbb{N}^+$, amelyre $S_{k+8} < S_k + 16$.

Tekintsük a $H = \{S_k, S_k + 1, \ldots, S_k + 15\}$ halmazt. Mivel $S_{k+8} < S_{k+16}$, ezért kilenc S_k, S_{k+1}, ..., S_{k+8} részletösszeg biztosan eleme H-nak. 1 pont

Ezután tekintsük a $T = \{S_k + m, S_k + m + 1, \ldots, S_k + m + 15\}$ halmazt. Megmutatjuk, hogy ennek a halmaznak legalább 8 eleme szintén részletösszege a sorozatnak.

Legyen S_b a legnagyobb $S_k + m$-nél kisebb részletösszeg. Ez azt jelenti, hogy $S_{b+1} \in T$. Mivel

$$S_{b+8} - S_b = a_{b+1} + a_{b+2} + \ldots + a_{b+8} \leq 16,$$

ezért

$$S_{b+8} \leq S_b + 16 < S_k + m + 16$$

Tehát S_{b+1}-től S_{b+8}-ig a részletösszegek elemei T-nek.

Így tudjuk, hogy H legalább $9, T$ pedig legalább 8 részletösszeget tartalmaz a sorozatból. 1 pont

A skatulyaelv alapján az alábbi 16 pár közül legalább az egyik tartalmazza a sorozat két részletösszegét.

$$\{S_k, S_k + m\}, \{S_k + 1, S_k + m + 1\}, \ldots, \{S_k + 15, S_k + m + 15\}.$$

A két részletösszeg a keresett S_i és S_j, különbségük pedig éppen m.

Ezzel igazoltuk, hogy a hexadecimális sorozat m vágáshossza a 16 tetszőleges pozitív egész számú többszöröse lehet. 2 pont

Összesen: **7 pont**