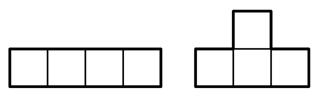
Kezdők I. kategória 3. (döntő) forduló

Feladatok

1. A Tetris nevű játék elemei olyan alakzatok, amelyeket négy darab egység oldalú négyzet összeillesztésével kaphatunk. A négy négyzet csak teljes oldal mentén kapcsolódhat egymáshoz, és közülük egyik sem fedhet egy másikat. Két elemet különbözőnek tekintünk, ha síkban nem forgathatók egymásba. Például a játék két különböző eleme az alábbi két alakzat:



a) Hány különböző elem van a Tetris játékban? **3 pont**

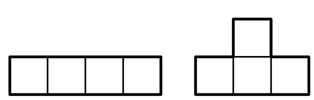
b) Alfonz Tetris elemekből hézag- és átfedésmentesen egy téglalapot rakott ki. Megállapította, hogy a kirakott téglalapban az összes különböző elem szerepel. Legalább hány elemet használt fel a téglalap megépítéséhez? **7 pont**

2. Bármely 1-nél nagyobb egész számra képezzük a következő összeget: a számhoz hozzáadjuk a nála kisebb pozitív osztói közül a legnagyobbat. (Például: a 15-re ez az összeg $15+5=20$ lesz.) Mutassuk meg, hogy az így kapott összeg értéke egyetlen esetben lesz a 10-nek pozitív egész kitevőjű hatványa! **10 pont**

3. Az $ABCD$ négyzet belsejében felvesszük a P pontot úgy, hogy az ABP háromszög olyan egyenlő szárú háromszög legyen, amelynek alapon fekvő szögei 15°-osak. Mekkora a CPD szög? **10 pont**

Megoldások és javítási útmutató

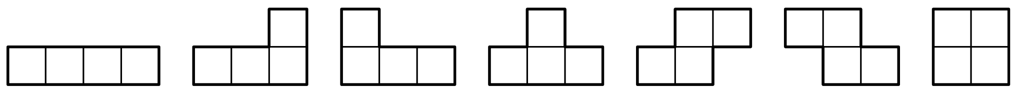
1. A Tetris nevű játék elemei olyan alakzatok, amelyeket négy darab egység oldalú négyzet összeillesztésével kaphatunk. A négy négyzet csak teljes oldal mentén kapcsolódhat egymáshoz, és közülük egyik sem fedhet egy másikat. Két elemet különbözőnek tekintünk, ha síkban nem forgathatók egymásba. Például a játék két különböző eleme az alábbi két alakzat:



a) Hány különböző elem van a Tetris játékban? **3 pont**

b) Alfonz Tetris elemekből hézag- és átfedésmentesen egy téglalapot rakott ki. Megállapította, hogy a kirakott téglalapban az összes különböző elem szerepel. Legalább hány elemet használt fel a téglalap megépítéséhez? **7 pont**

Megoldás. *a)* Tetris elemek:



Összesen 7-féle elem van a játékban. 3 pont

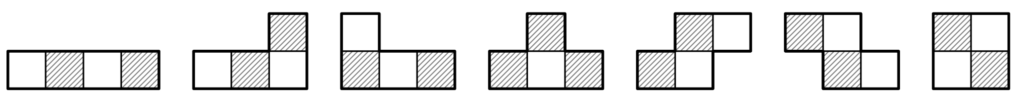
Megjegyzés. A megadott elemeken kívül 1 vagy 2 elem megtalálása 1 pont; 3 vagy 4 elem megtalálása 2 pont; 5 elem megtalálása 3 pont.

b) Megmutatjuk, hogy a hét különböző elem felhasználásával nem építhető téglalap.

A téglalap $7 \times 4 = 28$ egységnégyzetből állna. 1 pont

Ha egy ilyen téglalapot sakktáblaszerűen színezünk ki, akkor ugyanannyi mező lesz fehér, mint fekete. 1 pont

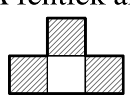
A hét elemből hat olyan, hogy a téglalapra bárhogyan helyezve mindenképpen 2 fekete és 2 fehér mezőt fed le. Az egyik elem (az ábrán a középső) azonban nem ilyen:



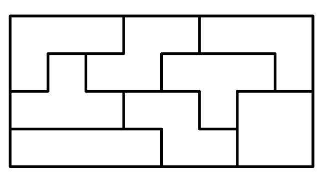
Emiatt az összes elem együtt nem egyenlő számú fekete, illetve fehér mezőt fed le. 1 pont

Ezért ebből a hét elemből hézag- és átfedésmentesen nem illeszthető össze téglalap. 1 pont

A fentiek alapján 8 elemből is csak akkor lehet hézag- és átfedésmentesen téglalapot kirakni, ha

a  elemet kétszer használjuk.

Ez megvalósítható, például az alábbi módon:



2 pont

Tehát Alfonz legalább 8 elemet használt fel. 1 pont

Összesen: **10 pont**

2. Bármely 1-nél nagyobb egész számra képezzük a következő összeget: a számhoz hozzáadjuk a nála kisebb pozitív osztói közül a legnagyobbat. (Például: a 15-re ez az összeg $15+5=20$ lesz.) Mutassuk meg, hogy az így kapott összeg értéke egyetlen esetben lesz a 10-nek pozitív egész kitevőjű hatványa! **10 pont**

Megoldás. Ha $n > 1$ páros szám, akkor a legnagyobb, n-nél kisebb osztója $\frac{n}{2}$, így ennek és a számnak az összege: $\frac{3n}{2}$, ami nem lehet a 10-nek a hatványa, hiszen osztható 3-mal. 1 pont

Ha $n > 1$ páratlan szám, akkor jelöljük n legnagyobb, n-nél kisebb osztóját m-mel. Azt kell igazolnunk, hogy az alábbi egyenletnek egyetlen megoldása létezik n-ben (k pozitív egész):

$$n + m = 10^k$$ 1 pont

Az $n+m$ összeg m többszöröse, hiszen n maga is osztható m-mel. 1 pont

Mivel n páratlan, így m páratlan osztója a jobb oldalon szereplő 10-hatványnak: $m = 1$ vagy $m = 5^\alpha$ valamilyen α pozitív egészre. 1 pont

Az előbbi eset nem lehetséges, mert ha $m = 1$, akkor n prím, de egy prím nem lehet $10^k - 1$ alakú, hiszen $10^k - 1$ bármely k pozitív egészre osztható 9-cel. 1 pont

Ha $m = 5^\alpha$ valamilyen α pozitív egészre, akkor írjuk a keresett számot $n = s \cdot 5^\alpha$ alakban, ahol s az n 1-nél nagyobb osztói közül a legkisebbet jelöli. Az 5 osztója n-nek, így $s \leq 5$. Mivel s páratlan, így két esetet kell megvizsgálnunk: $s = 3$ vagy $s = 5$. 2 pont

Ha $s = 3$, azaz $n = 3 \cdot 5^\alpha$, akkor $n+m = 4 \cdot 5^\alpha = 10^k$, amiből $k = \alpha = 2$, tehát $n = 3 \cdot 5^2 = 75$. 1 pont

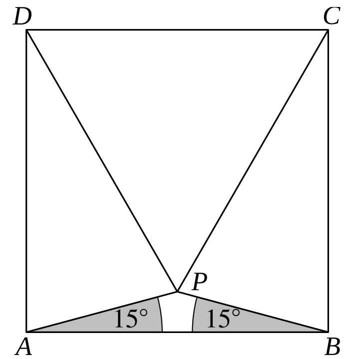
Ha $s = 5$, azaz $n = 5^{\alpha+1}$, akkor $n+m = 6 \cdot 5^\alpha = 10^k$, ami ellentmondás, hiszen egy 10-hatvány nem lehet osztható 3-mal. 1 pont

Tehát valóban egyetlen megoldás van: $n = 75$, amelyre a kérdezett összeg: $75+25 = 100 = 10^2$. 1 pont

Összesen: **10 pont**

3. Az $ABCD$ négyzet belsejében felvesszük a P pontot úgy, hogy az ABP háromszög olyan egyenlő szárú háromszög legyen, amelynek alapon fekvő szögei 15°-osak. Mekkora a CPD szög? **10 pont**

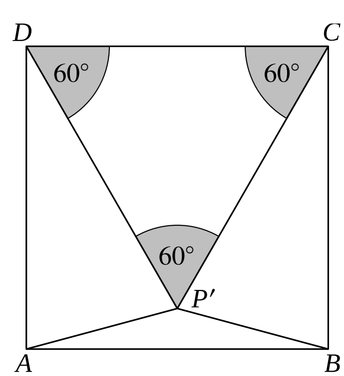
1. megoldás. Készítsünk ábrát! 1 pont



Sejtés: a keresett szög 60°-os.

Az ábra tengelyesen szimmetrikus az AB oldal felezőmerőlegesére, ezért a CDP háromszög egyenlő szárú. Ha egyik szöge 60°-os, akkor a háromszög szabályos, és $CD = DP = CP$. 1 pont

Vegyük fel az $ABCD$ négyzet CD oldalára befelé a CDP' szabályos háromszöget a következő ábra szerint: 1 pont



Az $AP'D$ háromszög egyenlő szárú háromszög, hiszen

$$AD = CD = DP'.$$ 1 pont

Az $AP'D$ háromszög szárszöge $90° - 60° = 30°$. Így alapon fekvő szögei $\dfrac{180° - 30°}{2} = 75°$ nagyságúak. 1 pont

Innen $P'AB$ szög $90° - 75° = 15°$ nagyságú. 1 pont

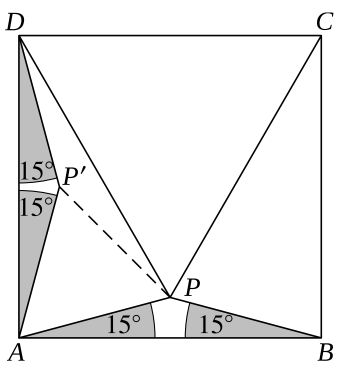
Az ábra szimmetriája miatt ugyanez igaz a $P'BA$ a szögre. 1 pont

Az ABP és az ABP' háromszögek egybevágóak, mert egy oldaluk és a rajta fekvő két szög egyenlő. Így $P = P'$. 2 pont

Tehát a keresett szög $60°$-os. 1 pont

Összesen: **10 pont**

2. megoldás. Készítsünk ábrát! 1 pont



Vegyünk fel a négyzet DA oldalára egy ABP háromszöggel egybevágó DAP' háromszöget! Először megmutatjuk, hogy P' az APD háromszög belső pontja, és az APD háromszög egyenlő szárú. 2 pont

A PAP' szög $90° - 2 \cdot 15° = 60°$ nagyságú, továbbá $AP = AP'$, így az APP' háromszög szabályos háromszög. 1 pont

Tekintsük a DPP' háromszöget! A háromszög egyenlő szárú, mivel $PP' = AP' = DP'$.

Mivel a $DP'A$ és $AP'P$ szögek összege $150° + 60° = 210°$, ezért P' valóban az APD háromszög belsejében helyezkedik el, továbbá a $DP'P$ szög $360° - 210° = 150°$ nagyságú. 1 pont

A DPP' háromszög egybevágó az DAP' háromszöggel, mivel két-két oldaluk és az általuk közrezárt szögük egyenlő. 1 pont

Innen $AD = DP$, tehát az APD háromszög valóban egyenlő szárú. 1 pont

Alapon fekvő szögei $60° + 15° = 75°$ nagyságúak, így az APD szög $75°$-os. 1 pont

Az ábra szimmetrikus az AB oldal felezőmerőlegesére, így a BPC szög is $75°$-os. 1 pont

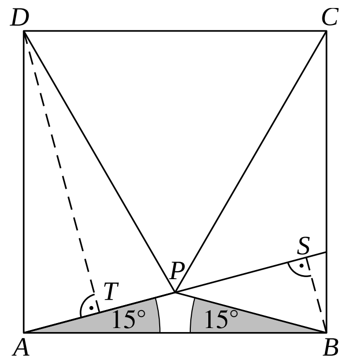
Tehát a keresett szög: $360° - 150° - 2 \cdot 75° = 60°$ nagyságú. 1 pont

Összesen: **10 pont**

3. megoldás. Készítsünk ábrát! 1 pont

Az APB szög $180° - 2 \cdot 15° = 150°$ nagyságú. 1 pont

Hosszabbítsuk meg az AP szakaszt, majd az így kapott egyenesre állítsunk merőlegest B-ből. A merőleges talppontja legyen S.



Az SPB szög $180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$ nagyságú, ezért az SPB háromszög egy fél szabályos háromszög. Ennek rövidebb befogója az átfogó fele, azaz $SB = \frac{PB}{2}$. 2 pont

Állítsunk merőlegest D-ből AP-re, legyen ennek talppontja T! Először megmutatjuk, hogy T az AP szakasz felezőpontja, és így az APD háromszög egyenlő szárú. A DAT háromszögben a DAT szög $90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$ nagyságú, és az ADT szög $90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$-os. Tehát a DAT háromszög egybevágó az ASB háromszöggel, mert egy-egy oldaluk ($AD = AB$) és a rajta fekvő szögeik (15° és 75°) egyenlők. 2 pont

$AT = SB = \frac{PB}{2} = \frac{PA}{2}$, azaz T valóban felezőpontja az AP szakasznak, ebből következően az APD háromszög egyenlő szárú.

Az APD szög egyenlő a DAT szöggel, azaz 75°-os. 2 pont

Az ábra szimmetrikus az AB oldal felezőmerőlegesére, emiatt a BPC szög is 75°-os. 1 pont

Tehát a keresett szög: $360^\circ - 150^\circ - 2 \cdot 75^\circ = 60^\circ$ nagyságú. 1 pont

Összesen: **10 pont**