Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

2021/2022-es tanév

Haladók II. kategória 1. forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Melyik az az ötjegyű négyzetszám, amelynek (balról jobbra olvasva) első számjegye 2, negyedik számjegye pedig 5? **7 pont**

Megoldás. Legyen a keresett szám A. Mivel

$$20\,000 \leq A < 30\,000$$

Ebből

$$142 \leq \sqrt{A} \leq 173$$

Tehát a keresett szám az $\overline{1xy}$ szám négyzete. 1 pont

$(\overline{1xy})^2 = (100+10x+y)^2 = 10000+2000x+100x^2+200y+20xy+y^2$. 1 pont

A negyedik számjegyet csak az ötödik és a hatodik tag befolyásolja. 1 pont

Mivel $20xy$-ban a tízesek helyi értékén álló számjegy páros, a keresett számban pedig 5, ami páratlan, ezért y^2 első számjegyének páratlannak kell lennie. 1 pont

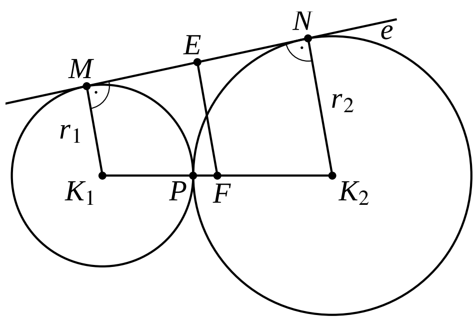
$y = 4$ esetén az ötödik tag $80x$. Ennek 40-re kell végződnie, tehát $x = 3$ vagy $x = 8$. Az így kapott számok, a 134 és a 184, nem felelnek meg a feltételnek. 1 pont

$y = 6$ esetén az ötödik tag $120x$. Ennek 20-ra kell végződnie, tehát $x = 1$ vagy $x = 6$. Az így kapott számok a 116 és a 166, közülük a 166 felel meg a feltételnek. 1 pont

Tehát a keresett szám $166^2 = 27\,556$. 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. Az r_1 sugarú, K_1 középpontú kör és az r_2 sugarú, K_2 középpontú kör kívülről érintik egymást a P pontban. Legyen e a két kör közös külső érintője, azaz e egy olyan egyenes, amely mindkét kört érinti, és nem megy át a P ponton. Igaz-e, hogy a K_1K_2 átmérőjű kör érinti az e egyenest? **7 pont**



Megoldás. Egy kör akkor és csak akkor érint egy egyenest, ha középpontja az egyenestől éppen akkora távolságra van, mint a kör sugara. 1 pont

Az e egyenes a két kört az M és az N pontban érinti, a K_1K_2 szakasz felezőpontja F, az MN szakasz felezőpontja E.

Az érintési pontokba húzott K_1M és K_2N sugarak merőlegesek az e egyenesre, ezért egymással párhuzamosak, így a K_2NMK_1 négyszög egy derékszögű trapéz, alapjainak hossza r_1 és r_2. 2 pont

E trapéz szárainak felezőpontjait összekötő középvonal éppen az FE szakasz. 1 pont

Ezért egyrészt FE párhuzamos a trapéz K_1M és K_2N alapjaival, ezért FE merőleges az e egyenesre, ami azt jelenti, hogy az F pontnak, vagyis a K_1K_2 átmérőjű kör középpontjának a távolsága az e egyenestől éppen az FE szakasz hosszával egyenlő. 1 pont

Másrészt az FE középvonal hossza a két alap számtani közepével, azaz $\frac{r_1+r_2}{2}$-vel egyenlő. Mivel az r_1 sugarú és az r_2 sugarú kör érinti egymást, a középpontjaik távolsága a két sugár összege, azaz $K_1K_2 = r_1 + r_2$. 1 pont

Ez pedig azt jelenti, hogy a K_1K_2 átmérőjű kör F középpontja az e egyenestől $FE = \frac{K_1K_2}{2}$ távolságra van, azaz éppen olyan távol, mint amekkora a K_1K_2 átmérőjű kör sugara, ezért ez a kör érinti az e egyenest. 1 pont

Összesen: **7 pont**

3. Az $1, 2, 3, \ldots, 36, 37$ számok közül kiválasztunk két különböző számot, amelyek szorzata megegyezik a ki nem jelölt 35 szám összegével. Melyik lehetett a két kiválasztott szám?

Megoldás. A megadott számok összege $1+2+\ldots+37 = \frac{37(37+1)}{2} = 703.$ 1 pont

Legyen a két kiválasztott szám x és y ($x < y$). Ekkor a feladat feltétele alapján:

$$xy = 703 - x - y$$
$$xy + x + y = 703$$
$$(x+1)(y+1) = 704$$

3 pont

A $704 = 2^6 \cdot 11$ felbontás alapján a 704 osztópárjait sorban megvizsgálva a megadott $x < y$ alapján csak az $(x+1; y+1) = (22; 32)$ eset lehetséges, amiből $x = 21$ és $y = 31$ adódik.
Tehát a kiválasztott két szám a 21 és a 31. 3 pont

Összesen: **7 pont**

4. Az x, y, z valós számok teljesítik az alábbi egyenlőséget:

$$|x-y| = 2|y-z| = 3|z-x|.$$

Igazoljuk, hogy $x = y = z$. **7 pont**

1. megoldás. Bontsuk fel az abszolút értékeket!

1. eset: $x \le y \le z$.

$$\left.\begin{aligned} y-x&=2z-2y \\ y-x&=3z-3x \end{aligned}\right\} \iff \left.\begin{aligned} 3y&=2z+x \\ 3y&=9z-6x \end{aligned}\right\}, \qquad \text{ebből} \qquad \begin{gathered} 2z+x=9z-6x, \\ x=z. \end{gathered}$$

Így $x = y = z$. 1 pont

2. eset: $x \le z \le y$.

$$\left.\begin{aligned} y-x&=2y-2z \\ y-x&=3z-3x \end{aligned}\right\} \iff \left.\begin{aligned} y&=2z-x \\ y&=3z-2x \end{aligned}\right\}, \qquad \text{ebből} \qquad \begin{gathered} 2z-x=3z-2x, \\ x=z. \end{gathered}$$

Így $x = y = z$. 1 pont

3. eset: $y \le x \le z$.

$$\left.\begin{aligned} x-y&=2z-2y \\ x-y&=3z-3x \end{aligned}\right\} \iff \left.\begin{aligned} y&=2z-x \\ y&=4x-3z \end{aligned}\right\}, \qquad \text{ebből} \qquad \begin{gathered} 2z-x=4x-3z, \\ x=z. \end{gathered}$$

Így $x = y = z$. 1 pont

4. eset: $y \le z \le x$.

$$\left.\begin{aligned} x-y&=2z-2y \\ x-y&=3x-3z \end{aligned}\right\} \iff \left.\begin{aligned} y&=2z-x \\ y&=3z-2x \end{aligned}\right\}, \qquad \text{ebből} \qquad \begin{gathered} 2z-x=3z-2x, \\ x=z. \end{gathered}$$

Így $x = y = z$. 1 pont

5. eset: $z \le x \le y$.

$$\left.\begin{aligned} y-x&=2y-2z \\ y-x&=3x-3z \end{aligned}\right\} \iff \left.\begin{aligned} y&=2z-x \\ y&=4x-3z \end{aligned}\right\}, \qquad \text{ebből} \qquad \begin{gathered} 2z-x=4x-3z, \\ x=z. \end{gathered}$$

Így $x = y = z$. 1 pont

6. eset: $z \le y \le x$.

$$\left.\begin{aligned} x-y&=2y-2z \\ x-y&=3x-3z \end{aligned}\right\} \iff \left.\begin{aligned} 3y&=x+2z \\ 3y&=9z-6x \end{aligned}\right\}, \qquad \text{ebből} \qquad \begin{gathered} x+2z=9z-6x, \\ x=z. \end{gathered}$$

Így $x = y = z$. 1 pont

Tehát x, y, z bármely nagyság szerinti sorrendje esetén igaz az állítás, így az állítás minden valós számhármasra igaz. 1 pont

Összesen: **7 pont**

Megjegyzés. Az utolsó 1 pont jár, ha a versenyző legalább három esetet kipróbált.

2. megoldás. Legyen $|x-y| = 6a$ $(a \geq 0)$!

$a = 0$ esetén $|x-y| = |y-z| = |z-x| = 0$, ahonnan $x = y = z$. 2 pont

$a > 0$ esetén $|x-y| = 6a$, ahonnan $|y-z| = 3a$, $|z-x| = 2a$. 2 pont

Ekkor

$$6a = |x-y| = |x-z+z-y| \leq |x-z| + |z-y| = |z-x| + |y-z| = 2a + 3a = 5a,$$

amiből $a \leq 0$ adódik, ami ellentmond az $a > 0$ feltételnek. Így ez az eset nem valósulhat meg. Ezzel az állítást igazoltuk. 3 pont

Összesen: 7 pont

3. megoldás. Az egyenlőség első és a harmadik tagjából $y-x = 3(z-x)$ vagy $y-x = -3(z-x)$. 2 pont

A második tag: $2|y-z| = 2\big|(y-x)-(z-x)\big|$, 2 pont

ami tehát vagy $2\big|(3-1)(z-x)\big| = 4\big|(z-x)\big|$, vagy $2\big|(-3-1)(z-x)\big| = 8\big|z-x\big|$, 1 pont

de mindkettő csak $|z-x| = 0$ esetén lehet egyenlő $3|z-x|$-szel, 1 pont

azaz $z = x$, amiből következik, hogy $x = y = z$. 1 pont

Összesen: 7 pont

5. Szétbontható-e a $H = \{1;2;3;\ldots;2021\}$ halmaz olyan részhalmazokra, amelyek mindegyikében a legnagyobb elem az adott részhalmaz többi elemének összegével egyenlő? (A szétbontás úgy értendő, hogy a részhalmazoknak nincs közös elemük, és az uniójuk kiadja a H halmazt.) **7 pont**

Megoldás. Tegyük fel, hogy létezik ilyen szétbontás, jelöljük $H_1, H_2, \ldots, H_n$-nel a megfelelő részhalmazokat! Vizsgáljuk meg például H_1 elemeinek összegét! Ha H_1 legnagyobb eleme a_1, akkor a feltétel szerint H_1 többi elemének összege is a_1, azaz a H_1-beli elemek összege $2a_1$, 1 pont

tehát H_1 elemeinek összege páros szám. 1 pont

Hasonló igaz minden részhalmazra, tehát mindegyik részhalmazban az elemek összege páros szám, 1 pont

és mivel az n db részhalmaz közös elem nélküli, uniójuk pedig H, ezért H elemeinek összege n db páros szám összege, vagyis szintén páros szám kell legyen. 1 pont

De H elemeinek összege valójában páratlan, hiszen a páros számokon kívül 1011 darab páratlan szám van benne (vagy számszerűen az összeg $\dfrac{2021 \cdot 2022}{2} = 2\,043\,231$), 2 pont

azaz ellentmondásra jutottunk, a szétbontás tehát nem lehetséges. 1 pont

Összesen: 7 pont