

Haladók II. kategória 3. (döntő) forduló

Feladatok

1. Bizonyítsuk be, hogy ha x, y és z pozitív számok, akkor

$$\frac{x^2}{(x+y)(x+z)} + \frac{y^2}{(x+y)(y+z)} + \frac{z^2}{(x+z)(y+z)} \geq \frac{3}{4}.$$

Mely esetben áll fenn az egyenlőség?

7 pont

2. Adott az O középpontú r sugarú k kör és annak egy $AB > r$ húrja. P az AB húr azon pontja, amelyre $AP = r$. A BP szakasz felezőmerőlegese a k kört a C és D pontokban metszi. A D és P pontokra illeszkedő egyenesnek és k -nak D -től különböző metszéspontja E . Bizonyítsuk be, hogy a CPE háromszög szabályos.

7 pont

3. Egy körön kijelölünk 2022 különböző pontot, és mindegyikhez hozzárendelünk egy egész számot úgy, hogy mindegyik nagyobb, mint az óramutató járásával ellentétes irányban az őt megelőző két szám összege. Mennyi lehet a pontokhoz rendelt pozitív egészek számának maximuma?

7 pont