Megoldások és javítási útmutató

1. Bizonyítsuk be, hogy ha x, y és z pozitív számok, akkor

$$\frac{x^2}{(x+y)(x+z)}+\frac{y^2}{(x+y)(y+z)}+\frac{z^2}{(x+z)(y+z)} \geqslant \frac{3}{4}.$$

Mely esetben áll fenn az egyenlőség? **7 pont**

Megoldás. A nevezők pozitívak, ha mindkét oldalt szorozzuk $4\,(x+y)\,(x+z)\,(y+z)$-vel, akkor a bizonyítandóval ekvivalens egyenlőtlenséget kapunk:

$$4x^2\,(y+z)+4y^2\,(x+z)+4z^2(x+y) \geqslant 3(x+y)(x+z)(y+z)$$

1 pont

Zárójelfelbontás után:

$$4x^2y+4x^2z+4xy^2+4y^2z+4xz^2+4yz^2 \geqslant 3x^2y+3x^2z+3xy^2+3y^2z+3xz^2+3yz^2+6xyz$$

Rendezve:

$$x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2 \geqslant 6xyz$$

2 pont

A pozitív xyz-vel elosztjuk mindkét oldalt, akkor megint az előzővel ekvivalens egyenlőtlenséget kapunk:

$$\frac{x}{z} + \frac{y}{z} + \frac{x}{y} + \frac{z}{y} + \frac{y}{x} + \frac{z}{x} \geqslant 6$$

$$\left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) \geqslant 6$$

2 pont

Az egyes zárójelpárokban pozitív törtek, és azok reciprok értékei állnak, ezért mindegyik zárójelpárban lévő két tört összege legalább 2, ezért a bal oldalon álló kifejezés értéke legalább 6, ezt kellett belátni. 1 pont

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $x = y = z$ teljesül. 1 pont

Összesen: 7 pont

Az $x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2 \geqslant 6xyz$ egyenlőtlenség bizonyítása másképpen:

$$x^2y - 2xyz + yz^2 + xy^2 - 2xyz + xz^2 + x^2z - 2xyz + y^2z \geqslant 0$$

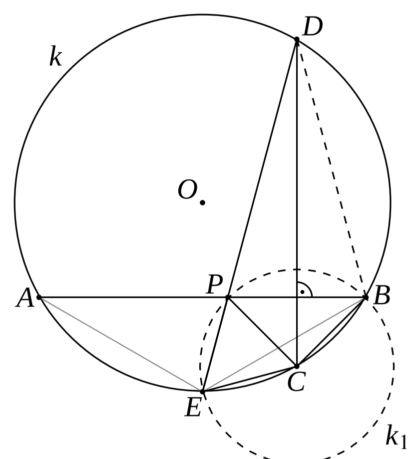
$$y(x-z)^2 + x(y-z)^2 + z(x-y)^2 \geqslant 0.$$

3 pont

A bal oldalon mindhárom tényező legalább nulla, az állítás igaz. 1 pont

2. Adott az O középpontú r sugarú k kör és annak egy $AB > r$ húrja. P az AB húr azon pontja, amelyre $AP = r$. A BP szakasz felezőmerőlegese a k kört a C és D pontokban metszi. A D és P pontokra illeszkedő egyenesnek és k-nak D-től különböző metszéspontja E. Bizonyítsuk be, hogy a CPE háromszög szabályos. **7 pont**

Megoldás.



A C és D pontok rajta vannak a PB szakasz felezőmerőlegesén, ezért $CP = CB$ és $CDB\sphericalangle = CDP\sphericalangle = CDE\sphericalangle$. 1 pont

Mivel a k körben az azonos nagyságú kerületi szögekhez egyenlő hosszúságú húrok tartoznak, ezért $CE = CB$. Így az E, P, B pontok rajta vannak a C középpontú CB sugarú k_1 körön. 1 pont

$APE\sphericalangle = DPB\sphericalangle$ (csúcsszögek) és $PAE\sphericalangle = BAE\sphericalangle = BDE\sphericalangle = BDP\sphericalangle$ (azonos íven nyugvó kerületi szögek). Ennek figyelembevételével $EPA\triangle \sim BDP\triangle$, és mivel $DP = DB$, ezért mindkét háromszög egyenlő szárú, tehát $AE = AP = r$. 1 pont

A k körben az r hosszúságú húrokhoz $60°$-os középponti szög tartozik, vagyis $EOA\sphericalangle = 60°$. 1 pont

A kerületi és középponti szögek tételét kétszer alkalmazva

– a k körben: $EBP\sphericalangle = EBA\sphericalangle = \frac{1}{2}EOA\sphericalangle = 30°$, 1 pont

– a k_1 körben: $ECP\sphericalangle = 2EBP\sphericalangle = 60^\circ$. 1 pont

Így a CPE 60°-os szárszögű egyenlő szárú háromszög, tehát szabályos. Ezzel az állítást beláttuk. 1 pont

Összesen: **7 pont**

3. Egy körön kijelölünk 2022 különböző pontot, és mindegyikhez hozzárendelünk egy egész számot úgy, hogy mindegyik nagyobb, mint az óramutató járásával ellentétes irányban az őt megelőző két szám összege. Mennyi lehet a pontokhoz rendelt pozitív egészek számának maximuma? **7 pont**

Megoldás. Legyenek a pontokhoz rendelt egész számok az egyiktől elindulva és az óramutató járása szerint haladva $a_0, a_1, {}_2, \ldots, a_{2021}$ és a ciklikus haladást figyelembe véve vezessük be az $a_{k+2022} = a_k$ $(k \in \mathbf{Z})$ jelölést.

(a) Először azt fogjuk megmutatni, hogy a körön nem lehet két szomszédos nemnegatív egész szám. Indirekt bizonyítást alkalmazva tegyük fel, hogy $a_{k-1} \geqslant 0$ és $a_k \geqslant 0$.

Ekkor a feladat feltételét is felhasználva $a_{k+1} > a_k + a_{k-1} \geqslant a_k$.

Így a_{k+1} is nemnegatív egész szám, és a korábbi gondolatmenetet egymás után ismételgetve $a_{k+2} > a_{k+1}$, majd $a_{k+3} > a_{k+2}$ és így haladva az $a_{k+2022} > a_{k+2021} > \ldots > a_{k+1} > a_k = a_{k+2022}$. Ellentmondáshoz jutottunk.

A kapott eredmény alapján tehát legfeljebb minden második szám lehet csak nemnegatív egész szám. 3 pont

(b) A továbbiakban – szintén indirekt bizonyítást alkalmazva – azt fogjuk megmutatni, hogy a nemnegatív egészek száma még ennyi sem lehet. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $a_{2k} \geqslant 0$ és $a_{2k+1} < 0$ minden $k \in \mathbf{Z}$ esetén. Ekkor a feladat feltétele és a feltevésünk alapján $a_3 > a_2 + a_1 \geqslant a_1$.

Analóg levezetéssel adódik, hogy $a_5 > a_3$, $a_7 > a_5$ és így tovább, amíg az $a_1 = a_{2023} > a_{2021} > \\ > \ldots > a_3 > a_1$. Ismét ellentmondásra jutottunk. 2 pont

Eredményeinket összefoglalva megállapíthatjuk, hogy $\frac{2022}{2} = 1011$-nél több nemnegatív egész szám nem lehet a pontokhoz rendelt számok között, mivel akkor lenne közöttük szomszédos. Az *(a)* és *(b)* pontok alapján 1011 nemnegatív egésszel sem teljesíthető a feladat feltétele.

1010 pozitív és 1012 negatív számmal viszont megadható megfelelő elrendezés. Például az $a_0 - a_{2021}$ számok az alábbiak lehetnek:

$$-4043,\ 1,\ -4041,\ 1,\ -4039,\ 1,\ \ldots,\ -2025,\ 1,\ -2023,\ -2021.$$ 2 pont

Összesen: **7 pont**