Haladók III. kategória 1. forduló

Feladatok

1. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$\sqrt{2-x}+\frac{x^2}{\sqrt{2-x}}+x^2=\frac{1}{\sqrt{2-x}}+\frac{\sqrt{2-x}}{x^2}+\frac{1}{x^2}.$$

7 pont

2. Egy ABC hegyesszögű háromszög belsejében felveszünk egy tetszőleges, de a magasságponttól különböző P pontot. P-n keresztül párhuzamosokat húzunk az oldalakkal. A C-ből induló magasság és az AB-vel párhuzamos egyenes metszéspontja X, a B-ből induló magasság és az AC-vel párhuzamos egyenes metszéspontja Y, a harmadik párhuzamos és a harmadik magasság metszéspontja Z. Igazoljuk, hogy az XYZ háromszög hasonló ABC-hez! **7 pont**

3. Jelölje $m(n)$ az n pozitív egész számnak a 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 osztókkal adott osztási maradékainak összegét. Például $m(25)=1+1+1+0+1+4+1+7+5=21$.

Melyek azok az n kétjegyű pozitív egész számok, amelyekre $m(n)=m(n+1)$? **7 pont**

4. A síkon felvettünk 47 különböző pontot. Mindegyik pont mindkét koordinátája egész szám, és az x és y koordinátára teljesül, hogy $1\le x\le 20$, valamint $1\le y\le 5$. Igazoljuk, hogy a pontok közül kiválasztható négy darab úgy, hogy ezek egy olyan téglalap csúcsai legyenek, amelynek az oldalai párhuzamosak a tengelyekkel! **7 pont**

5. Jelölje $f(n)$ azt a számot, ahányféleképpen az n pozitív egész felbontható – a tagok sorrendjének figyelembe vételével – pozitív páratlan számok összegére. Adjuk meg $f(n)$-t!

(*Mivel az összegben a tagok sorrendje számít, az* 5*-nek például a* $3+1+1$ *és az* $1+3+1$ *különböző felbontásai. Az* 5 *ötféleképpen bontható fel a fenti módon, ezek:* 5*;* $3+1+1$*;* $1+3+1$*;* $1+1+3$*;* $1+1+1+1+1$*, így* $f(5)=5$.) **7 pont**