Megoldások és javítási útmutató

1. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$\sqrt{2-x}+\frac{x^2}{\sqrt{2-x}}+x^2=\frac{1}{\sqrt{2-x}}+\frac{\sqrt{2-x}}{x^2}+\frac{1}{x^2}.$$ **7 pont**

1. megoldás. Nyilván $x<2$; $x\neq 0$. Rendezve az egyenletet kapjuk:

$$\left(\sqrt{2-x}-\frac{\sqrt{2-x}}{x^2}\right)+\left(\frac{x^2}{\sqrt{2-x}}-\frac{1}{\sqrt{2-x}}\right)+\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)=0,$$

majd

$$\left(\frac{\sqrt{2-x}\cdot(x^2-1)}{x^2}\right)+\left(\frac{x^2-1}{\sqrt{2-x}}\right)+\left(\frac{x^4-1}{x^2}\right)=0.$$ 2 pont

$$\left(\frac{\sqrt{2-x}\cdot(x^2-1)}{x^2}\right)+\left(\frac{x^2-1}{\sqrt{2-x}}\right)+\left(\frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x^2}\right)=0.$$ 1 pont

Ha $x^2-1=0$ (azaz $x=\pm1$), akkor minden kifejezés értelmes, és a számlálók mind 0-k, azaz ez megoldás. 1 pont

Ha nem, akkor osszunk (x^2-1)-gyel:

$$\left(\frac{\sqrt{2-x}}{x^2}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2-x}}\right)+\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)=0.$$

Mivel ekkor három pozitív tört összegét kaptuk, már nincs több megoldás. 2 pont

Azaz a két megoldás: $x_1=1$ és $x_2=-1$. 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. megoldás. Vezessünk be új betűket (többféle „eredményes helyettesítés” elképzelhető, mi egyet mutatunk meg); legyen $a=\sqrt{2-x}$; $b=\frac{1}{x^2}$; $c=\frac{1}{ab}=\frac{x^2}{\sqrt{2-x}}$. Nyilván $abc=1$ és (a megfelelő kikötések miatt) $a, b, c>0$. 1 pont

A helyettesítések után az egyenletünk a következő alakú: $a+c+\frac{1}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}+b$. 1 pont

Szorozzunk fel abc-vel (azaz 1-gyel, mikor melyik „kényelmesebb”), kapjuk:

$$a+c+ac=bc+ab+b$$ 1 pont

Innen ($1=abc$-t adva mindkét oldalhoz):

$$a+c+ac+1=bc+ab+b+abc,$$ 1 pont

azaz $(a+1)(c+1)=b(a+1)(c+1)$, innen (egy oldalra rendezve) $0=(b-1)(a+1)(c+1)$ adódik. 1 pont

Azaz vagy $b=\frac{1}{x^2}=1\Rightarrow x_{1,2}=\pm1$ (és ekkor $a, c>0$ teljesül, azaz a gyökök megfelelőek),

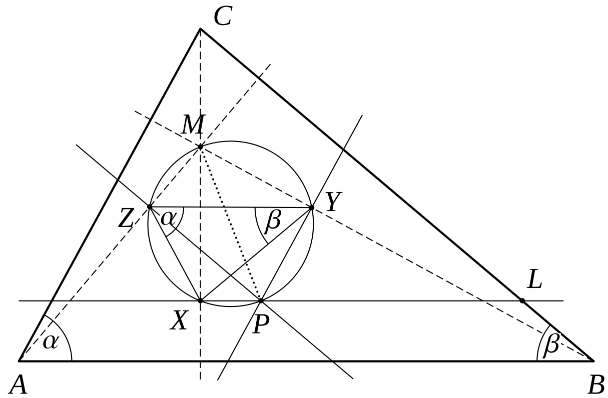
vagy $a=\sqrt{2-x}=-1$, vagy $c=\frac{x^2}{\sqrt{2-x}}=-1$. 1 pont

Utóbbi két egyenlőség, viszont nem teljesülhet $a, c>0$ miatt, azaz csak két megoldás van, és a két megoldás: $x_1=1$ és $x_2=-1$. 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. Egy ABC hegyesszögű háromszög belsejében felveszzünk egy tetszőleges, de a magasságponttól különböző P pontot. P-n keresztül párhuzamosokat húzunk az oldalakkal. A C-ből induló magasság és az AB-vel párhuzamos egyenes metszéspontja X, a B-ből induló magasság és az AC-vel párhuzamos egyenes metszéspontja Y, a harmadik párhuzamos és a harmadik magasság metszéspontja Z. Igazoljuk, hogy az XYZ háromszög hasonló ABC-hez! **7 pont**

Megoldás. Mivel a magasság merőleges a megfelelő párhuzamosra, ezért az $MXP\sphericalangle$, az $MYP\sphericalangle$, valamint az $MZP\sphericalangle$ derékszög. 1 pont



Ezért X, Y, Z rajta van az MP mint átmérő fölé rajzolt Thalész-körön. 1 pont

$XPZ\sphericalangle = ABC\sphericalangle = \beta$, mert egyállású szögek. $XPZ\sphericalangle = XYZ\sphericalangle = \beta$, mivel egy ívhez tartozó kerületi szögek. 2 pont

$YPL\sphericalangle = CAB\sphericalangle = \alpha$, mert egyállású szögek. A $ZXPY$ húrnégyszög YPL külső szöge egyenlő az XZY belső szöggel, tehát $XZY\sphericalangle = \alpha$. 2 pont

A két háromszög két szöge egyenlő, tehát a két háromszög hasonló. 1 pont

Összesen: **7 pont**

3. Jelölje $m(n)$ az n pozitív egész számnak a 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 osztókkal adott osztási maradékainak összegét. Például $m(25) = 1+1+1+0+1+4+1+7+5 = 21$.

Melyek azok az n kétjegyű pozitív egész számok, amelyekre $m(n) = m(n+1)$? **7 pont**

Megoldás. Ha $n+1$ a 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 számok egyikével sem osztható, akkor $m(n+1) = m(n)+9$, mivel $n+1$ az osztók mindegyikével 1-gyel több maradékot ad, mint n. 1 pont

Ha $n+1$ a felsorolt k_i osztók közül a $2 \le k_1 < k_2 < \ldots < k_r$ $(r \in \mathbb{N})$ számok többszöröse, akkor $m(n+1) = m(n) - \big[(k_1-1)+(k_2-1)+\ldots+(k_r-1)\big] + (9-r)\cdot 1 = m(n)+9-(k_1+k_2+\ldots+k_r)$. Így $m(n+1) = m(n) \Leftrightarrow k_1+k_2+\ldots+k_r = 9$, vagyis $(n+1)$-nek a 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 számok közül kikerülő osztói összegének 9-nek kell lennie. 2 pont

Sorrendet nem tekintve, az egytagú összeget is megengedve a 9 különböző tagok összegére bontásának lehetőségei: $9 = 2+7 = 3+6 = 4+5 = 2+3+4$. A felbontások és a korábbi megállapítások alapján ha 9 osztója $(n+1)$-nek, akkor 3 is osztója, így $m(n+1) < m(n)$;

ha 3 és 6 osztója $(n+1)$, akkor 2 is osztója, így $m(n+1) < m(n)$;

ha 4 és 5 osztója $(n+1)$-nek, akkor 2 is osztója, így $m(n+1) < m(n)$;

ha 2, 3 és 4 osztója $(n+1)$-nek, akkor 6 is osztója, így ismét $m(n+1) < m(n)$.

ha 2 és 7 osztója $(n+1)$-nek, de a 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 számok egyikével sem osztható, akkor teljesül az $m(n) = m(n+1)$ egyenlőség. 3 pont

Ez az $n+1 = 1\cdot 14 = 14$ és $n+1 = 7\cdot 14 = 98$ esetekben áll fenn, azaz $n = 13$, illetve $n = 97$ esetén teljesül a feladat feltétele. 1 pont

Összesen: **7 pont**

4. A síkon felvettünk 47 különböző pontot. Mindegyik pont mindkét koordinátája egész szám, és az x és y koordinátára teljesül, hogy $1 \le x \le 20$, valamint $1 \le y \le 5$. Igazoljuk, hogy a pontok közül kiválasztható négy darab úgy, hogy ezek egy olyan téglalap csúcsai legyenek, amelynek az oldalai párhuzamosak a tengelyekkel! **7 pont**

Megoldás. A pontok 5 sorban és 20 oszlopban helyezkednek el. Minden sor esetén nézzük az abban a sorban lévő pontok számát; az első sorban legyen a, a másodikban b, a harmadikban c, a negyedikben d, az ötödikben e darab pont.

Minden sorban az ott levő pontok közül az összes lehetséges módon kiválasztunk két darabot, és feljegyezzük a két pont x koordinátáját mint nem rendezett számpárt.

Ekkor összesen $\binom{a}{2}+\binom{b}{2}+\binom{c}{2}+\binom{d}{2}+\binom{e}{2}$ számpárt választottunk ki. 1 pont

Mivel ez az összeg csak véges sok különböző értéket vehet fel, ezért van minimuma. Ezt akkor éri el, ha az a, b, c, d, e számok között legfeljebb 1 az eltérés. Hiszen ha például az első sorban legalább 2-vel több pont lenne, mint a másodikban, akkor ebből egyet áttéve a másodikba, az összeg csökkeni fog. 2 pont

Vagyis az összeg akkor éri el a minimumát, ha két szám 10-zel, három szám pedig 9-cel egyenlő.

Ilyenkor az $\binom{a}{2}+\binom{b}{2}+\binom{c}{2}+\binom{d}{2}+\binom{e}{2}$ összeg 198-cal egyenlő. 2 pont

Az $1,2,\ldots,20$ számok közül kettőt $\binom{20}{2}=190$-féleképpen lehet kiválasztani. 1 pont

Mivel az $\binom{a}{2}+\binom{b}{2}+\binom{c}{2}+\binom{d}{2}+\binom{e}{2}$ összeg minimuma is nagyobb, mint ahányféleképpen 20 számból kiválasztható egy rendezetlen számpár, ezért bármennyi is legyen a, b, c, d és e értéke, a skatulyaelv miatt lesz két sor, ahol ugyanolyan helyzetű pontpár került kiválasztásra, ami azt jelenti, hogy keletkezik megfelelő téglalap. 1 pont

Összesen: **7 pont**

5. Jelölje $f(n)$ azt a számot, ahányféleképpen az n pozitív egész felbontható – a tagok sorrendjének figyelembe vételével – pozitív páratlan számok összegére. Adjuk meg $f(n)$-t!

(*Mivel az összegben a tagok sorrendje számít, az* 5*-nek például a* $3+1+1$ *és az* $1+3+1$ *különböző felbontásai. Az* 5 *ötféleképpen bontható fel a fenti módon, ezek:* 5*;* $3+1+1$*;* $1+3+1$*;* $1+1+3$*;* $1+1+1+1+1$*, így* $f(5)=5$.) **7 pont**

Megoldás. Először egy lemmát bizonyítunk be (ami a későbbiekben fontos lesz).

Megjegyzés. A gyerekek jó eséllyel ezt a lemmát – ha egyáltalán bizonyítják – a későbbi bizonyításban, „mellékbizonyításként” teszik meg.

Lemma. Legyen $g(1)=g(2)=1$, és a további $n>2$ idexekre

– (ha páratlan n) $g(n+1)=g(n)+g(n-2)+g(n-4)+\ldots+g(1)$, illetve

– (ha páros n) $g(n+1) = g(n) + g(n-2) + g(n-4) + \ldots + g(2) + 1$.

Ekkor $g(n+2) = g(n+1) + g(n)$ (ha $n > 1$). (Azaz a sorozat a Fibonacci-sorozat.)

A lemma bizonyítása. Teljes indukcióval.

– Ha $n = 2$; 3;4 vagy 5, akkor $g(n+1)$-re:

$$g(2+1) = g(3) = g(2) + 1 = 1 + 1 = 2;$$
$$g(3+1) = g(4) = g(3) + g(1) = 2 + 1 = 3;$$
$$g(4+1) = g(5) = g(4) + g(2) + 1 = 3 + 1 + 1 = 5$$

és

$$g(5+1) = g(6) = g(5) + g(3) + g(1) = 5 + 2 + 1 = 8,$$

azaz teljesül a bázis állítás.

– Tegyük fel, hogy adott n-ig minden (akár páros, akár páratlan) indexű tagra igaz a fenti „összeg-rekurzió”.

– Megmutatjuk, hogy igaz $(n+1)$-re is.

– Ha $(n+1)$ páratlan, akkor

$$\begin{aligned} g(n+2) &= g(n+1+1) = g(n+1) + g(n-1) + g(n-3) + \ldots + g(1) = \\ &= g(n+1) + \underbrace{g(n-1) + g(n-3) + \ldots + g(1)}_{=g(n)} = \\ &= g(n+1) + g(n). \qquad \checkmark \end{aligned}$$

(Az indukciós feltevés miatt).

– Ha pedig $(n+1)$ páros, akkor

$$\begin{aligned} g(n+2) &= g(n+1+1) = g(n+1) + g(n-1) + g(n-3) + \ldots + g(2) + 1 = \\ &= g(n+1) + \underbrace{g(n-1) + g(n-3) + \ldots + g(2) + 1}_{=g(n)} = \\ &= g(n+1) + g(n). \qquad \checkmark \end{aligned}$$

(Szintén az indukciós feltevés miatt).

Azaz valóban igaz $g(n+2) = g(n+1) + g(n)$ (ha $n > 1$); és ezt akartuk bizonyítani. 2 pont

Most térjünk vissza az eredeti feladatra: $f(n)$ első pár értékét felírva:

$$f(1) = 1; \quad f(2) = 1; \quad f(3) = 2; \quad f(4) = 3; \quad f(5) = 5.$$

Ezek alapján azt fogjuk igazolni, hogy $f(n)$ az $F(1) = F(2) = 1$; $F(n+2) = F(n) + F(n+1)$ (ha $n \geq 1$) képlettel megadott Fibonacci-sorozattal egyezik meg. Ehhez (a kezdőértékeink egyenlősége miatt) csak azt kell igazolnunk, hogy teljesül a következő rekurzió:

$$f(n+2) = f(n) + f(n+1) \qquad (\text{ha } n \geq 1).$$ 2 pont

A bizonyítást teljes indukcióval fogjuk elvégezni.

$f(1) = 1$ és $f(2) = 1$ (továbbá az első 5 indexre is megvizsgáltuk már a sorozatot.) Tegyük fel, hogy adott $(n+1)$-ig minden érvényes indexre az $f(n)$ sorozatunk teljesíti a fenti rekurziót.

Nézzük hogyan kaphatjuk $f(n+1)$-et a korábbi tagokból meg: vagy 1-gyel kezdjük az összegünket, vagy 3-mal vagy 5-tel … vagy az $(n+1)$-nél nem nagyobb legnagyobb páratlan számmal. Miután az összegünket 1-gyel vagy 3-mal vagy 5-tel … kezdtük, a „maradék” összeget $f(n+1-1) = f(n)$-, illetve $f(n+1-3) = f(n-2)$-, illetve $f(n+1-5) = f(n-4)$-, … féleképpen folytathatjuk. 1 pont

Innen adódik, hogy

– (ha páratlan n) $f(n+1) = f(n) + f(n-2) + f(n-4) + \ldots + f(1)$, illetve
– (ha páros n) $f(n+1) = f(n) + f(n-2) + f(n-4) + \ldots + f(2) + 1$ (ekkor a végén a „+1” az egy tagú $(n+1) = (n+1)$ felbontást jelenti). 2 pont

A két összegzés a Fibonacci-sorozat fent bebizonyított „ismert összegzési típusú képlete”.

Ezzel a feladatot megoldottuk, $f(n)$ valóban a Fibonacci-sorozat.

Megjegyzés. Ha valaki a lemmát nem bizonyította be, de egyértelműen „jól ismert tételként” hivatkozik rá; mert például a tanórán tanulta – a lemmánál korrekt bizonyításával kapható 2 ponttal ellentétben – kapjon 1 pontot. Ha nem hivatkozik ismert tételre, csak kimondja, hogy az eredmény a Fibonacci-sorozat, akkor a lemma bizonyításával kapható 2 pont helyett erre a részre 0 pontot kapjon.

Összesen: **7 pont**