

Haladók III. kategória 2. (döntő) forduló

Feladatok

1. Legyen H a 2022 elemű $H = \{1; 2; 3; \dots; 2022\}$ halmaz. Legyen továbbá $A_1, A_2, \dots, A_{2022}$ a H halmaz részhalmazainak egy olyan sorozata, hogy $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots \subseteq A_{2021} \subseteq A_{2022} \subseteq H$.
- Azt mondjuk, hogy az $A_1, A_2, \dots, A_{2022}$ halmaz-2022-es „Róbert típusú részhalmazsorozat”, ha $|A_1| + |A_2| + |A_3| + \dots + |A_{2022}| < 2022$,
 - Míg azt mondjuk, hogy az $A_1, A_2, \dots, A_{2022}$ halmaz-2022-es „Gida típusú részhalmazsorozat”, ha $|A_1| + |A_2| + |A_3| + \dots + |A_{2022}| = 2022$.

Melyikből van több, a H halmaz Róbert típusú, vagy Gida típusú részhalmazsorozataiból?

(Például az $A_1 = A_2 = \dots = A_{2022} = \emptyset$ Róbert típusú, míg az $A_1 = A_2 = \dots = A_{2020} = \emptyset$ és $A_{2021} = A_{2022} = \{1; 2; 3; \dots; 1010; 1011\}$ Gida típusú részhalmazsorozat.)

7 pont

2. Egy ABC hegyesszögű háromszög köréírt körének középpontja O , a BC oldalhoz tartozó magasság talppontja D . A háromszög köréírt körének sugara egyenlő a BC oldalhoz hozzáírt körének sugarával. Az A -ból induló belső szögfelező a köréírt kört E -ben metszi. Igazoljuk, hogy AE és DO szakaszok metszéspontja a háromszög beírt körének középpontja!

7 pont

3. Egy kör alakú futópályán 15 robotautó köröz állandó sebességgel egy közös irányba.

- Az első autó 1 perc alatt tesz meg egy teljes kört,
- a második autó $\frac{1}{2}$ perc alatt tesz meg egy teljes kört,
- a harmadik autó $\frac{1}{3}$ perc alatt tesz meg egy teljes kört, ...
- (általában az) i -edik autó $\frac{1}{i}$ perc alatt tesz meg egy teljes kört, és végül
- a 15-ödik autó $\frac{1}{15}$ perc alatt tesz meg egy teljes kört.

Minden autóról minden pillanatban eldönthető, hogy melyik szektorban van.

A kör alakú pálya 17 egyenlő (azaz egyenként $\frac{360^\circ}{17}$ -os középponti szögű) szektorra van felosztva.

Igazoljuk, hogy a robotautók tetszőleges kezdeti elhelyezkedése esetén van olyan időpont, amikor egyszerre hat különböző szektorban sincs egyetlen autó sem.

7 pont