## Megoldások és javítási útmutató

**1.** Legyen $H$ a 2022 elemű $H = \{1;2;3;\ldots;2022\}$ halmaz. Legyen továbbá $A_1$, $A_2$, …, $A_{2022}$ a $H$ halmaz részhalmazainak egy olyan sorozata, hogy $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots \subseteq A_{2021} \subseteq A_{2022} \subseteq H$.

– Azt mondjuk, hogy az $A_1, A_2, \ldots, A_{2022}$ halmaz-2022-es „*Róbert típusú részhalmazsorozat*”, ha $|A_1| + |A_2| + |A_3| + \ldots + |A_{2022}| < 2022$,

– Míg azt mondjuk, hogy az $A_1, A_2, \ldots, A_{2022}$ halmaz-2022-es „*Gida típusú részhalmazsorozat*”, ha $|A_1| + |A_2| + |A_3| + \ldots + |A_{2022}| = 2022$.

Melyikből van több, a $H$ halmaz Róbert típusú, vagy Gida típusú részhalmazsorozataiból? (Például az $A_1 = A_2 = \ldots = A_{2022} = \emptyset$ Róbert típusú, míg az $A_1 = A_2 = \ldots = A_{2020} = \emptyset$ és $A_{2021} = A_{2022} = \{1; 2; 3; \ldots; 1010; 1011\}$ Gida típusú részhalmazsorozat.) **7 pont**

**1. megoldás.** Általánosan $n$-elemű $H_n = \{1; 2; 3; \ldots; n\}$ halmazzal fogunk dolgozni.

Először számoljuk meg kicsi $n$-kre a $H_n$ Gida típusú részhalmazsorozatait. Ha $n = 1, 2, 3, 4, 5$ ezek száma rendre 1, 3, 10, 35 és 126, és ezek rendre megegyeznek $\binom{1}{1}$, $\binom{3}{2}$, $\binom{5}{3}$, $\binom{7}{4}$ és $\binom{9}{5}$-tel; innen a sejtésünk, hogy $n$ elemű halmaz esetén a Gida típusú részhalmazsorozatok száma $\binom{2n-1}{n}$. 1 pont

Ennek bizonyítása a következőképpen történhet. Jelölje $b_i$ azt a számot, ahány $A_1$, $A_2$, …, $A_n$ halmazban az $i \in H_n = \{1; 2; 3; \ldots; n\}$ szám előfordul. Mivel $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots \subseteq A_{n-1} \subseteq A_n$, ezért ha $b_i \neq 0$, akkor az $i$ szám pontosan az utolsó $b_i$ halmazban ($A_{n+1-b_i}$-től $A_n$-ig) fordul elő. Emiatt az $A_1$, $A_2$, …, $A_n$ halmazrendszert egyértelműen tudom kódolni a $b_1$, $b_2$, …, $b_n$ számokkal. A definiáló feltételek miatt minden $i$-re $b_i \geq 0$ és $b_1 + b_2 + \ldots + b_n = n$. 1 pont

A megfelelő $b_1$, $b_2$, …, $b_n$ szám-$n$-esek számát megkaphatom az alábbi módon is: válasszunk összesen $2n-1$ darab jelet, $n$ darab ◯-t és $n-1$ darab |-t; és írjuk fel valamilyen sorrendben a jeleket egymás után. $b_1$ legyen a legelső | előtti ◯ jelek száma (ez persze esetleg 0), $b_n$ legyen a legutolsó (azaz $(n-1)$-edik) | utáni ◯ jelek száma (ez persze esetleg 0); továbbá $b_i$ $(1 < i < n)$ legyen az $(i-1)$-edik és az $i$-edik | közötti ◯ jelek száma. Ez nyilván egy kölcsönösen egyértelmű leképezés a megfelelő |, ◯ sorozatok és a megfelelő $b_1$, $b_2$, …, $b_n$ szám-$n$-esek között, így ezek száma $\binom{2n-1}{n}$ és ezt akartuk bizonyítani.

A $\binom{2n-1}{n}$ képlet bizonyításáért 2 pont

Ezután lássuk a Róbert típusú halmazsorozatok számát. Némi számolás után azt láthatjuk, hogy ezek száma is $\binom{2n-1}{n}$. Ezt fogjuk (az előzőhöz nagyon hasonlóan) bizonyítani.

Jelölje $c_i$ azt a számot, ahány $A_1, A_2, \ldots, A_n$ halmazban az $i \in H_n = \{1; 2; 3; \ldots; n\}$ szám előfordul. Az előző ponthoz hasonlóan az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ halmazrendszert egyértelműen tudom kódolni a $c_1$, $c_2$, …, $c_n$ számokkal. A definiáló feltételek miatt minden $i$-re $c_i \geq 0$ és $c_1 + c_2 + \ldots + c_n \leq n - 1 < n$. Vezessük be továbbá a $c_{n+1} = n - 1 - (c_1 + c_2 + \ldots + c_n)$ „mennyiséget”. Nyilván $0 \leq c_{n+1} < n$ szintén, és $c_{n+1}$ adott $c_1$, $c_2$, …, $c_n$ esetén „egyértelműen kódolt”.

A megfelelő $c_1$, $c_2$, …, $c_n$, $c_{n+1}$ szám-$(n+1)$-esek számát megkaphatom az alábbi módon is: válasszunk összesen $2n-1$ darab jelet, $n-1$ darab ◯-t és $n$ darab |-t; és írjuk fel valamilyen sorrendben a jeleket egymás után. $c_1$ legyen a legelső | előtti ◯ jelek száma (ez persze esetleg 0), $c_{n+1}$ legyen a legutolsó (azaz $n$-edik) | utáni ◯ jelek száma (ez persze esetleg 0); továbbá

$c_i$ $(1 < i \leq n)$ legyen az $(i-1)$-edik és az $i$-edik $|$ közötti $\bigcirc$ jelek száma. Ez nyilván egy kölcsönösen egyértelmű leképezés a megfelelő $|$, $\bigcirc$ sorozatok és a megfelelő $c_1, c_2, \ldots, c_n, c_{n+1}$ szám-$(n+1)$-esek között, így ezek száma $\binom{2n-1}{n}$.

Egy megfelelő $c_1$, $c_2$, ..., $c_n$, $c_{n+1}$ szám-$(n+1)$-esből pedig úgy kapom meg a megfelelő $c_1$, $c_2$, ..., $c_n$ szám-$n$-est, hogy egyszerűen „elhagyom” az utolsó $c_{n+1}$ tagot. Mivel $c_{n+1}$ adott $c_1$, $c_2$, ..., $c_n$ esetén egyértelműen meghatározott volt, ezért itt is kölcsönösen egyértelmű leképezés van a megfelelő szám-$(n+1)$-esek és a megfelelő szám-$n$-esek között, azaz ezek száma is $\binom{2n-1}{n}$.

De ezzel megvagyunk, mert akkor adott $n$ esetén $H_n$ Róbert típusú halmazrendszereinek a száma is $\binom{2n-1}{n}$.

A Róbert részhalmazsorozatoknál a $\binom{2n-1}{n}$ képlet bizonyításáért — 2 pont

Azaz a $H$ halmaz Róbert típusú és Gida típusú részhalmazsorozatai ugyanannyian vannak. — 1 pont

**Összesen:** — **7 pont**

**2. megoldás.** Itt is általánosan $n$-elemű $H_n = \{1;2;3;\ldots;n\}$ halmazzal fogunk dolgozni, és itt is először a Gida típusú részhalmazsorozatok számát adjuk meg.

A fent leírtak alapján ez a feladat pontosan ugyanaz, mint ha az $n$-elemű $\{1;2;3;\ldots;n\}$ halmaz elemeiből képeznénk $n$-elemű multihalmazokat (azaz olyan halmazokat, amelyekben egy egy elem többször is előfordulhat), ugyanis ha $b_i$ a multihalmazban az $1 \leq i \leq n$ elem „ismétlődésének a száma”, akkor – a fentiek szerint – éppen az utolsó $b_i$ darab $A_k$ halmaznak az eleme az $i$ ($A_{n+1-b_i}$-től $A_n$-ig).

A megfelelő multihalmazok száma ($n$ elem $n$-edosztályú ismétléses kombinációi – közismert képlet) pedig $\binom{n+n-1}{n} = \binom{2n-1}{n}$. — 3 pont

Hasonlóan az olyan Róbert típusú halmazrendszerek száma, ahol $|A_1| + |A_2| + |A_3| + \ldots + |A_n| = k < n$ (azaz éppen $k$-elemű a „multihalmaz”, vagyis $n$ elem $k$-adosztályú ismétléses kombinációi) pedig $\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$.

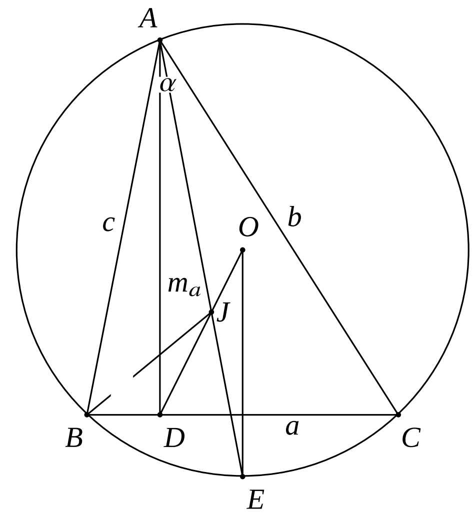
Ezeket kell összesíteni minden $0 \leq k < n$-re; az összes Róbert típusú halmazrendszerek száma tehát $\binom{n+0-1}{n-1} + \binom{n+1-1}{n-1} + \binom{n+2-1}{n-1} + \ldots + \binom{n+(n-1)-1}{n-1}$ ez pedig a binomiális együtthatók körében ismert összefüggés („zokni-szabály”) alapján éppen $\binom{2n-1}{n}$. — 3 pont

Azaz a $H$ halmaz Róbert típusú és Gida típusú részhalmazsorozatai ugyanannyian vannak. — 1 pont

**Összesen:** — **7 pont**

**2.** Egy $ABC$ hegyesszögű háromszög köréírt körének középpontja $O$, a $BC$ oldalhoz tartozó magasság talppontja $D$. A háromszög köréírt körének sugara egyenlő a $BC$ oldalhoz hozzáírt körének sugarával. Az $A$-ból induló belső szögfelező a köréírt kört $E$-ben metszi. Igazoljuk, hogy $AE$ és $DO$ szakaszok metszéspontja a háromszög beírt körének középpontja! **7 pont**

**Megoldás.** Használjuk az ábra jelöléseit.




Mivel az $A$-ból induló szögfelező felezi a $BC$ ívet, a $BC$ oldal felezőmerőlegese az $E$ pontban metszi a háromszög köré írható kört. 1 pont

Legyen $DO$ és $AE$ metszéspontja $J$. Bebizonyítjuk, hogy $BJ$ a háromszög $B$-nél levő szögének felezője. Ezt elegendő belátni, hiszen $AE$ a másik szögfelező, ezért $J$ a két szögfelező metszéspontja lesz, tehát a beírt kör középpontja. 1 pont

$AD$ és $OE$ párhuzamos, ezért $ADJ$ és $EOJ$ háromszögek hasonlósága miatt

$$\frac{AJ}{JE}=\frac{AD}{OE}=\frac{m_a}{\frac{T}{s-a}}=\frac{b+c-a}{a},$$

ahol $T$ a háromszög területét jelöli, $s$ pedig a félkerületet. Itt kihasználtuk, hogy a köréírt kör sugara egyenlő a $BC$ oldalhoz hozzáírt kör sugarával. 1 pont

Ebből $AJ\cdot a=JE\cdot b+JE\cdot c-JE\cdot a$, azaz $(AJ+JE)\cdot a=JE\cdot(b+c)$.

Írjuk fel az $ABEC$ húrnégyszögben a Ptolemaiosz-tételt, használjuk ki, hogy $BE=EC$:

$$(AJ+JE)\cdot a=BE\cdot b+EC\cdot c=BE\cdot(b+c).$$

Ezt az előzővel összehasonlítva $BE=JE$. 2 pont

A $BEJ$ egyenlő szárú háromszögben $E$-nél $\gamma$ van, ezért $B$-nél $90^\circ-\dfrac{\gamma}{2}$, valamint $CBE\sphericalangle$ szög $\dfrac{\alpha}{2}$ (itt kétszer használtuk, hogy ugyanolyan hosszú ívekhez egyenlő kerületi szögek tartoznak), ahonnan $JBC\sphericalangle=90^\circ-\dfrac{\gamma}{2}-\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\beta}{2}$. Azaz $BJ$ szögfelező, ezért $J$ két belső szögfelező metszéspontja, tehát a beírt kör középpontja. 2 pont

**Összesen:** **7 pont**

**3.** Egy kör alakú futópályán 15 robotautó köröz állandó sebességgel egy közös irányba.

– Az első autó 1 perc alatt tesz meg egy teljes kört,

– a második autó $\frac{1}{2}$ perc alatt tesz meg egy teljes kört,

– a harmadik autó $\frac{1}{3}$ perc alatt tesz meg egy teljes kört, …

– (általában az) $i$-edik autó $\frac{1}{i}$ perc alatt tesz meg egy teljes kört, és végül

– a 15-ödik autó $\frac{1}{15}$ perc alatt tesz meg egy teljes kört.

Minden autóról minden pillanatban eldönthető, hogy melyik szektorban van.

A kör alakú pálya 17 egyenlő (azaz egyenként $\frac{360^\circ}{17}$-os középponti szögű) szektorra van felosztva.

Igazoljuk, hogy a robotautók tetszőleges kezdeti elhelyezkedése esetén van olyan időpont, amikor egyszerre hat különböző szektorban sincs egyetlen autó sem. **7 pont**

**Megoldás.**

Legyen az első autó sebessége 1 (egység). Ekkor a feltételek alapján az $i$-edik autó sebessége $i$. Tekintsük a start (vagy „egy start") időpontot. Jelölje $a_i$ azt a szektort, amelyikben ebben a kezdeti időpontban tartózkodott az $i$-edik autó, és válasszuk $t$-nek azt az időt, amennyi idő alatt az első autó pontosan egy szektornyi utat megtesz (azaz $t = 1/17$ perc).

Tekintsük a $0 \cdot t$ (ez a start időpont), továbbá az $1 \cdot t, 2 \cdot t, \ldots, k \cdot t, \ldots, 16 \cdot t$ időpontokat. A feltételek (és a bevezetett változók) alapján az $i$-edik autó a $k \cdot t$ időpontban (a továbbiakban csak „a $k$-adik időpontként" hivatkozunk rá) az $a_i + i \cdot k \pmod{17}$ szektorban van. 1 pont

Jelentse azt a továbbiakban, hogy az „$i$-edik és a $j$-edik ($i \neq j$) autó *találkozik* a $k$-adik időpontban", hogy az $i$-edik és a $j$-edik autó a $k$-adik időpontban egy szektorban van. Ez nyilván azt jelenti, hogy $a_i + i \cdot k \equiv a_j + j \cdot k \pmod{17}$.

A kongruenciát rendezve azt kapjuk, hogy ez pontosan azt jelenti, hogy $a_i - a_j \equiv k \cdot (j - i) \pmod{17}$. Mivel 17 prím, és tetszőleges $1 \leqq i \neq j \leqq 15$ $i$ és $j$ pár esetén a 17 és $(j - i)$ relatív prímek, ezért ($k$-t tekintve ismeretlennek) az $a_i + i \cdot k \equiv a_j + j \cdot k \pmod{17}$ kongruenciának pontosan egy megoldása van a $k = 0, 1, \ldots, 16$ számok között. 2 pont

Azaz az autóknak (minden autó minden másikkal pontosan egyszer találkozik) összesen

$$\frac{15 \cdot 14}{2} = 105$$

találkozójuk van a megfelelő 17 időpont alatt. Mivel $\frac{105}{17} \approx 6{,}18 > 6$, emiatt – a skatulyaelv szerint – van olyan $k$ időpont, amikor legalább 7 darab találkozó van. Tekintsük az egyik ilyen $k$ időpontot. 2 pont

Indirekt tegyük fel, hogy ebben a $k$ időpontban legfeljebb 5 üres szektor van. Ha minden autó külön szektorban lenne (0 darab találkozóval), akkor összesen 2 üres szektor lenne; ennek feleltessük meg az $(1;1;1;\ldots;1;1;0;0)$ „rendezett szektorsorozatot". Mivel legfeljebb 5 üres szektor van, ezért a $(1;1;1;\ldots;1;1;0;0)$ rendezett sorozatból legfeljebb az utolsó 3 darab 1-est helyezhetjük át, azaz a lehetséges pontosan 5 üres szektoros esetek „rendezett szektorsorozatai": $(4;1;1;\ldots;1;1;0;0;0;0;0)$, $(3;2;1;\ldots;1;1;0;0;0;0;0)$ és $(2;2;2;1;\ldots;1;1;0;0;0;0;0)$. Nézzük meg, hogy ezek az esetek hány találkozót jelentenek:

– A $(4;1;1;\ldots;1;1;0;0;0;0;0)$ összesen $\binom{4}{2} = 6 < 7$ találkozót jelent;

– a $(3;2;1;\ldots;1;1;0;0;0;0;0)$ összesen $\binom{3}{2} + \binom{2}{2} = 3 + 1 = 4 < 7$ találkozót jelent; és

– a $(2;2;2;1;\ldots;1;1;0;0;0;0;0)$ összesen $3\cdot\binom{2}{2}=3<7$ találkozót jelent.

Ezek mindegyike kevesebb, mint 7 találkozót jelent. Nyilvánvaló módon, ha ötnél még kevesebb szektor lenne üres, akkor sem lehetne 7, vagy annál több találkozó. 1 pont

Mivel öt üres szektor esetén nem jöhet létre a megfelelő $k$-adik időpontban 7 darab találkozó, ezért a $k$-adik időpontban legalább 6 darab üres szektor van. Ezzel az állítást bebizonyítottuk. 1 pont

**Összesen:** **7 pont**