Megoldások és javítási útmutató

1. Adjuk meg azokat a p, q pozitív prímszámokat és n pozitív egészt, amelyekre

$$n^2+1=(p^2+1)(q^2+1).$$ **10 pont**

Megoldás. Ha p és q is páratlan prímek, akkor p^2+1 és q^2+1 is páros, ezért a szorzatuk 4-gyel osztható. 1 pont

Ahhoz, hogy az egyenlőség valamilyen n pozitív egészre fennálljon, n szükségképpen páratlan kell, hogy legyen. Ha $n=2k-1$ alakú valamilyen k pozitív egész számra, akkor $n^2+1= =4k^2-4k+2$, vagyis az n^2+1 alakú szám 4-gyel osztva 2 maradékot ad, azaz nem lehet 4-gyel osztható. 1 pont

A p és q prímek közül tehát legalább az egyik páros.

Ha $p=q=2$, akkor $n^2+1=25$, amiből n értéke nem egész szám, hiszen a 24 nem négyzetszám. 1 pont

Tehát a p és q prímek közül pontosan az egyik páros, az egyenlet szimmetriája miatt feltehető, hogy $p=2$, így $q\geqslant 3$. 1 pont

Ebből következik, hogy $n^2+1\geqslant 50$, tehát $n\geqslant 7$. 1 pont

Az $n^2+1=5(q^2+1)$ egyenletet rendezve $n^2-4=5q^2$, vagyis $(n-2)(n+2)=5q^2$. 1 pont

Az $n-2$ és $n+2$ tényezők lehetséges értékeit az $5q^2$ szorzat összes lehetséges felbontása (az egészek körében) adja. Figyelembe véve, hogy $5\leqslant n-2<n+2$, az $n-2$ kifejezésre a következő lehetőségek adódnak: $n-2=5$, illetve $n-2=q$. 1 pont

Ha $n-2=5$, akkor $n+2=9$, a $45=5q^2$ egyenletből $q=3$ páratlan prím, ez megoldása a feladatnak. 1 pont

Ha $n-2=q$, akkor az $n+2=q+4=5q$ egyenletből $q=1$ nem prím. 1 pont

Tehát a $p=2$, $q=3$, $n=7$ számhármas, valamint a p és q értékének felcserélésével nyert $p=3$, $q=2$, $n=7$ számhármas adják az egyenlet összes megoldását: $7^2+1=50=5\cdot 10$ valóban fennáll. 1 pont

Összesen: **10 pont**

Az utolsó 8 pontra:

A p és q prímek közül tehát legalább az egyik páros.

Ekkor $n^2+1=5(q^2+1)$, ahonnan $n^2-4=5q^2$, vagyis $(n-2)(n+2)=5q^2$. 1 pont

Az $n-2$ és $n+2$ tényezők lehetséges értékeit az $5q^2$ szorzat összes lehetséges felbontása (az egészek körében) adja. Figyelembe véve, hogy $-1 \leqslant n-2 < n+2$, az $n-2$ kifejezésre a következő lehetőségek adódnak: $n-2=-1$; 1; 5; q; q^2. 1 pont

Ha $n-2=-1$, akkor $n+2=3$, a $3=-5q^2$ egyenletből q nem valós. 1 pont

Ha $n-2=1$, akkor $n+2=5$, az $5=5q^2$ egyenletből $q=1$ nem prím. 1 pont

Ha $n-2=5$, akkor $n+2=9$, a $9=q^2$ egyenletből $q=3$ prím, ez megoldása a feladatnak. 1 pont

Ha $n-2=q$, akkor $n+2=q+4$, a $q+4=5q$ egyenletből $q=1$ nem prím. 1 pont

Végül ha $n-2=q^2$, akkor $n+2=q^2+4$, a $q^2+4=5$ egyenletből $q=1$ nem prím. 1 pont

Tehát a $p=2$, $q=3$, $n=7$ számhármas, valamint a p és q értékének felcserélésével nyert $p=3$, $q=2$, $n=7$ számhármas adják az egyenlet összes megoldását: $7^2+1=50=5\cdot 10$ valóban fennáll. 1 pont

2. Egy vacsorán a házigazdán kívül $2n$ személy vesz részt (n pozitív egész szám). A házigazda a vacsora végén megkérdezi minden vendégtől, hogy hány emberrel koccintott a jelenlévők közül. Mindenki különböző választ ad. Hány vendéggel koccintott a házigazda? **10 pont**

Megoldás. A lehetséges válaszok, amit a házigazda kaphatott: $0, 1, 2, 3, \ldots, 2n$. 1 pont

Ezek közül a 0 és $2n$ nem szerepelhet egyszerre, hiszen ha volt valaki, aki senkivel sem koccintott, akkor nem lehetett olyan személy, aki mindenkivel koccintott. 1 pont

Így tehát a $2n$ különböző válasz $0, 1, 2, 3, \ldots, 2n-1$ vagy $1, 2, 3, 4, \ldots, 2n$ lehetett. Vizsgáljuk meg mindkét esetet! 1 pont

1. eset: A válaszok $0, 1, 2, 3, \ldots, 2n-1$. Legyenek a válaszadók rendre $A_0, A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{2n-1}$.

A_0 senkivel sem koccintott. A_{2n-1} A_0-n kívül mindenkivel koccintott. „Vegyük ki” A_0-t, A_{2n-1}-et és a már ismert koccintásokat: ekkor az marad, hogy A_1 0, A_2 1, …, A_{2n-2} $2n-3$ emberrel koccintott. Most pontosan ugyanazt mondhatjuk el A_1-ről és A_{2n-2}-ről, mint az előbb A_0-ról és A_{2n-1}-ről, azaz, hogy A_{2n-2} mindenkivel koccintott A_1-en (és A_0-n kívül) és A_1 (A_{2n-1}-en kívül) senkivel sem koccintott. Eljárásunkat folytatva eljutunk oda, hogy már csak A_{n-1} és A_n koccintásait kell vizsgálnunk: A_{n-1} 0, A_n 1 személlyel koccintott a megmaradó emberek közül. Ez utóbbi csak a házigazda lehetett, azaz ő összesen n személlyel koccintott: A_n, A_{n+1}, …, A_{2n-1}-gyel. 3 pont

2. eset: A válaszok $1, 2, 3, \ldots, 2n$. Legyenek a válaszadók rendre $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{2n}$.

A_{2n} mindenkivel koccintott. A_1 egyetlen koccintása tehát vele történt. „Vegyük ki” A_1-t, A_{2n}-et, és a már ismert koccintásokat: ekkor az marad, hogy A_2 1, A_2 2, …, A_{2n-1} $2n-1$ emberrel koccintott. Most pontosan ugyanazt mondhatjuk el A_2-ről és A_{2n-1}-ről, mint az előbb A_1-ről és A_{2n}-ről, azaz, hogy A_{2n-1} mindenkivel koccintott (A_1-en kívül) és A_2 csak A_{2n-1}-gyel (és A_{2n}-nel) koccintott. Eljárásunkat folytatva eljutunk oda, hogy már csak A_n és A_{n+1} koccintásait kell vizsgálnunk: A_n 1, A_{n+1} 2 személlyel koccintott a megmaradó emberek közül. Ez csak úgy lehet, hogy A_n csak A_{n+1}-gyel, A_{n+1} vele és a házigazdával koccintott. A házigazda így összesen összesen n személlyel koccintott: $A_{n+1}, \ldots, A_{2n}$-nel. 3 pont

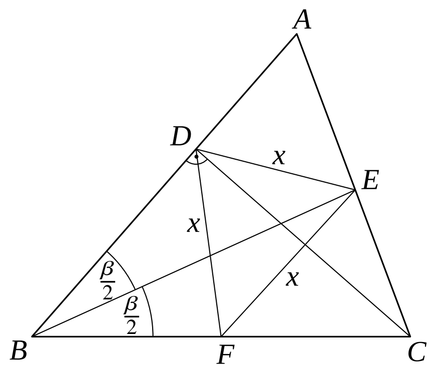
Mindkét esetben ugyanazt kaptuk, tehát a házigazda biztosan n emberrel koccintott. 1 pont

Összesen: **10 pont**

Megjegyzések. 1. Az utolsó pont csak akkor jár, ha mindkét esetet vizsgálta. 2. Ha a versenyző egy konkrét n érték esetén helyesen leírja a fenti gondolatmenetet, de nem általánosít, akkor legfeljebb 4 pontot kaphat.

3. A hegyesszögű ABC háromszögben a BC oldal felezőpontja F, a B csúcshoz tartozó belső szögfelező az E pontban metszi a CA oldalt, a C csúcshoz tartozó magasság talppontja D. Az így kapott DEF háromszög minden oldala 5 egység hosszúságú. Mekkora az ABC háromszög területének pontos értéke? **10 pont**

Megoldás. Készítsünk ábrát! Jelöljük a DEF szabályos háromszög oldalait x-szel, az $ABC\sphericalangle$-et β-val. 1 pont



Belátjuk, hogy ha a DEF háromszög szabályos, akkor az ABC háromszög is szabályos. 1 pont

A BCD derékszögű háromszögben a Thalész-tétel megfordítása alapján a körülírt kör középpontja a BC oldal F felezőpontja, $FB = FC = DF = x$, azaz $BC = 2x$. 1 pont

Mivel $FE = x$, F a BCE háromszög körülírt körének is a középpontja. Tehát ez a háromszög a Thalész-tétel értelmében derékszögű, azaz $CEB\sphericalangle = 90°$. 1 pont

Mivel BE felezi az $ABC\sphericalangle$-et, ezért $CEB\triangle \cong AEB\triangle$ (a BE oldal közös, és a rajta fekvő két szög – $\frac{\beta}{2}$, $90°$ – nagysága is megegyezik). 1 pont

Az egybevágóság alapján E felezőpontja a CA oldalnak és $BA = BC = 2x$. 1 pont

A CAD derékszögű háromszögben a Thalész-tétel megfordítása alapján a körülírt kör középpontja a CA oldal E felezőpontja, $EC = EA = ED = x$, azaz $CA = 2x$. 1 pont

Összegezve korábbi megállapításainkat $AB = BC = CA = 2x$, azaz az ABC háromszög szabályos. 1 pont

Az ABC szabályos háromszög oldala tehát $2x = 10$ egység, így területe: $T = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 10^2 = 25\sqrt{3}$ területegység. 2 pont

Összesen: **10 pont**