Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

2022/2023-as tanév

Haladók II. kategória 1. forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Az $\overline{abcd}$ négyjegyű számot „párosíthatónak” nevezzük, ha $a \geqslant b$ és $\overline{ab} - \overline{cd} = \overline{cd} - \overline{ba}$.

Például a 2011 „párosítható” szám, mivel $20 - 11 = 11 - 02$.

Határozzuk meg, hogy hány ilyen tulajdonságú négyjegyű szám létezik. **7 pont**

Megoldás. A második feltétel alapján:

$$(10a + b) - (10c + d) = (10c + d) - (10(b + a)$$
$$11(a + b) = 20c + 2d = 22c + 2(d - c)$$

Felhasználva, hogy a 11 prímszám, valamint $(2;11) = 1$, adódik, hogy $11 \mid d - c$. 2 pont

Ebből a $-9 \leqslant d - c \leqslant 9$ nagyságrend alapján $d - c = 0$, azaz $c = d$ adódik. 1 pont

Ezt a feltételt is felhasználva a korábbiak alapján az $a + b = 2c$ egyenlőséget kapjuk.

c értékét 1-től 9-ig növelve, az $a \geqslant b$ feltételt is figyelembe véve az alábbi megoldások adódnak:

$c = 1$ esetén 2011, 1111

$c = 2$ esetén 4022, 3122, 2222

$c = 3$ esetén 6033, 5133, 4233, 3333

$c = 4$ esetén 8044, 7144, 6244, 5344, 4444

$c = 5$ esetén 9155, 8255, 7355, 6455, 5555

$c = 6$ esetén 9366, 8466, 7566, 6666

$c = 7$ esetén 9577, 8677, 7777

$c = 8$ esetén 9788, 8888

$c = 9$ esetén 9999 3 pont

Így $2 + 3 + 4 + 5 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 29$ „párosítható” négyjegyű szám létezik. 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. A páros és páratlan számokat két külön háromszögbe írjuk a következő módon:

i)				*ii)*			
0				1			
2	4			3	5		
6	8	10		7	9	11	
12	14	16	18	13	15	17	19
$\vdots$				$\vdots$			

Mutassuk meg, hogy az első esetben a sorok összege 6-tal osztható szám lesz, míg a második esetben köbszám. **7 pont**

Megoldás. Mindkét háromszögben az n-edik sor felírásával összesen $\dfrac{n(n+1)}{2}$ számot írtunk le, és az $(n+1)$-edik sorban éppen $(n+1)$ darab szám van. 1 pont

Az első esetben az $(n+1)$-edik sor első száma $0+\dfrac{n(n+1)}{2}\cdot 2=n^2+n$, 1 pont

míg a második esetben az $(n+1)$-edik sor első száma $1+\dfrac{n(n+1)}{2}\cdot 2=n^2+n+1$. 1 pont

Az első esetben az $(n+1)$-edik sorban $(n+1)$ darab (n^2+n)-hez minden esetben 2-vel nagyobb számot adunk n-szer, így a sor értéke:

$$(n+1)(n^2+n)+2(1+2+3+\ldots+n)=(n+1)(n^2+n)+2\frac{n(n+1)}{2}=$$

$$=n(n+1)(n+2).$$ 1 pont

Mivel ez három egymást követő szám szorzata, ez minden esetben osztható hattal. 1 pont

A második esetben az $(n+1)$-edik sorban éppen $(n+1)$ darab (n^2+n+1)-hez minden esetben 2-vel nagyobb számot adunk n-szer, így a sor értéke:

$$(n+1)(n^2+n+1)+2(1+2+3+\ldots+n)=(n+1)(n^2+n+1)+2\frac{n(n+1)}{2}=$$ 1 pont

$$=n^3+3n^2+3n+1=(n+1)^3.$$ 1 pont

Összesen: **7 pont**

3. Legyenek x_1 és x_2 az $x^2-(a+d)\cdot x+ad-bc=0$ másodfokú egyenlet megoldásai.

Bizonyítsuk be, hogy ekkor az $x^2-\left(a^3+d^3+3abc+3bcd\right)\cdot x+(ad-bc)^3=0$ másodfokú egyenlet megoldásai x_1^3 és x_2^3. **7 pont**

Megoldás. A gyökök és együtthatók összefüggései alapján:

$$x_1+x_2=(a+d) \quad \text{és} \quad x_1\cdot x_2=ad-bc.$$ 1 pont

Mivel: $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)$, 1 pont ezért: $x_1^3 + x_2^3 = (a+d)^3 - 3(ad-bc)(a+d)$. 1 pont

Így $x_1^3 + x_2^3 = a^3 + 3a^2d + 3ad^2 + d^3 - 3a^2d - 3ad^2 + 3abc + 3bcd = a^3 + d^3 + 3abc + 3bcd$. 2 pont

Ekkor az $x^2 - \left(a^3 + d^3 + 3abc + 3bcd\right) \cdot x + (ad-bc)^3 = 0$ egyenlet így is írható:

$$x^2 - \left(x_1^3 + x_2^3\right) \cdot x + x_1^3 \cdot x_2^3 = 0.$$ 1 pont

Tényezőkre bontva:

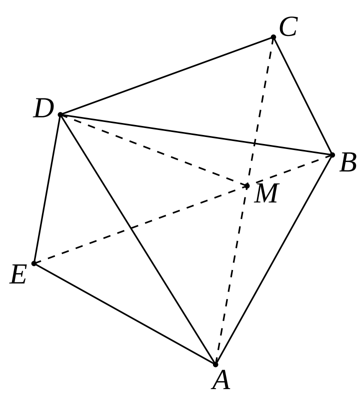
$$(x - x_1^3) \cdot (x - x_2^3) = 0.$$

Tehát a második egyenlet megoldásai x_1^3 és x_2^3. 1 pont

Összesen: **7 pont**

4. Az $ABCDE$ konvex ötszögben AC párhuzamos DE-vel és BE párhuzamos DC-vel. Bizonyítsuk be, hogy az AED és a BCD háromszög területe egyenlő! **7 pont**

1. megoldás.



Az AC és a BE átló metszéspontja legyen M. Az ADE háromszög területe egyenlő az MDE háromszög területével, ugyanis a DE szakasz mindkettőnek az egyik oldala, és az ehhez az oldalhoz tartozó magasságuk is egyenlő, ugyanis az A pont és az M pont a DE egyenestől egyenlő távol van, mivel az AM és a DE egyenes párhuzamos. 2 pont

Hasonlóan adódik, hogy a BCD háromszög és az MCD háromszög területe is egyenlő, mert a BM és a DC egyenesek párhuzamossága miatt a B pont és az M pont egyenlő távol van a közös CD oldal egyenesétől. 2 pont

Az $DEMC$ négyszög paralelogramma, amit az MD átló két egybevágó háromszögre oszt, ezért az MDE és az MCD háromszög területe is egyenlő. 2 pont

Tehát $T_{ADE} = T_{MDE} = T_{MCD} = T_{BCD}$, ezt kellett belátni. 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. megoldás. Az ADE háromszög területe egyenlő a CDE háromszög területével, mert DE oldaluk közös, és a DE és az AC szakaszok párhuzamossága miatt A és C egyenlő távol van a DE egyenestől, ezért a két háromszögnek a DE oldalhoz tartozó magassága egyenlő. 3 pont

A BCD háromszög területe szintén egyenlő a CDE háromszög területével, mert CD oldaluk közös, és a DC és az BE szakaszok párhuzamossága miatt B és E egyenlő távol van a CD egyenestől, ezért a két háromszögnek a CD oldalhoz tartozó magassága egyenlő. 3 pont

Tehát $T_{ADE} = T_{CDE} = T_{BCD}$, ezt kellet belátni. 1 pont

Összesen: **7 pont**

5. Tekintsük azokat a tízes számrendszerbeli számokat, amelyeknek minden számjegye különböző, bármely két szomszédos számjegyük legnagyobb közös osztója legalább 2, és az előző két feltétel teljesülése mellett a lehető legtöbb számjegyből állnak.

Egy n pozitív természetes szám és a nulla legnagyobb közös osztója az n szám.

Hány ilyen szám van? **7 pont**

Megoldás. Az 1 nem szerepelhet a szám számjegyei között, ezért a szám legfeljebb kilencjegyű lehet.

Ha az 5 és a 7 is benne van a számban, akkor mindkettő csak a nulla mellett lehet, hiszen ezek az összes többi számjegyhez relatív prímek, így ekkor két szám jöhet szóba: 507 és 705, de ezeknél nyilván van hosszabb szám is. 1 pont

Tehát az 5 és a 7 közül legfeljebb az egyik szerepelhet, és az is csak a nulla mellett, a szám valamelyik végén, ezért a számnak legfeljebb nyolc számjegye lehet, továbbá ezek a számok négyféle alakúak lehetnek: $50\ldots$, $70\ldots$, $\ldots 05$ és $\ldots 07$. 1 pont

Könnyű belátni, hogy mind a négyféle számból ugyanannyi van, hiszen az 5 és a 7 szerepe felcserélhető, mivel a számjegyek közül pontosan ugyanazokhoz relatív prím az 5, mint a 7.

Továbbá egy szám pontosan akkor megfelelő, ha a számjegyek sorrendjének megfordításával kapott szám is megfelelő.

Ezért elég az $50\ldots$ típusú számok számát meghatározni. 1 pont

A számban az 5 és a 0 számjegyeken kívül még a 2, 4, 6, 8, 3 és 9 számjegyek szerepelhetnek.

Soroljuk három halmazba a hat számjegyet: $K = \{2;4;8\}$, $S = \{6\}$ és $H = \{3;9\}$.

Olyan $50\ldots$-val kezdődő nyolcjegyű számokat kell készíteni, amelyekben K-beli számjegy nem kerülhet H-beli számjegy mellé. 1 pont

Ez úgy lehetséges, hogy a szám $50k_1k_2k_36h_1h_2$ vagy $50h_1h_26k_1k_2k_3$ alakú, ahol $\{k_1;k_2;k_3\} = K$ és $\{h_1;h_2\} = H$, és minden ilyen alakú szám megfelelő. 1 pont

Mindkét fajtából $2 \cdot 3! \cdot 2! = 48$ darab van. 1 pont

Tehát $50\ldots$ típusú számból összesen 48 darab van, és ugyancsak 48-48 darab van a másik három alaptípusból is, ezért összesen 192 megfelelő szám van. 1 pont

Összesen: **7 pont**