

Haladók II. kategória 2. forduló

Feladatok

1. Egy sorozat első tagja $a_1 = 2$. Tudjuk, hogy a sorozat $(n + 1)$ -edik tagja:

$$a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{a_n + 1}$$

Határozzuk meg a sorozat 2023-adik tagját!

7 pont

2. Az a és b pozitív egész számokra teljesül, hogy:

$$\frac{1}{\sqrt{a - \sqrt{a^2 - 1}}} - \frac{1}{\sqrt{a + \sqrt{a^2 - 1}}} = b.$$

Mi lehet az a szám utolsó számjegye?

7 pont

3. A nem egyenlő szárú ABC háromszög leghosszabb AB oldalán kijelölünk olyan D és E pontokat, amelyekre teljesül, hogy $AD = AC$ és $BE = BC$. A D ponton keresztül AC -vel és az E ponton keresztül BC -vel párhuzamosan húzott egyenesek az F pontban metszik egymást. Bizonyítsuk be, hogy FC felezi az EFD szöget.

7 pont

4. Egy tízes számrendszerben felírt hatjegyű szám számjegyei mind különbözőek és egyik sem 0, valamint a szám osztható 37-tel. Bizonyítsuk, be hogy a számjegyeknek van még legalább 7 olyan sorrendje, ahol a kapott hatjegyű szám szintén osztható 37-tel!

7 pont