Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

2022/2023-as tanév

Haladók II. kategória 2. forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Egy sorozat első tagja $a_1 = 2$. Tudjuk, hogy a sorozat $(n+1)$-edik tagja:

$$a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{a_n + 1}$$

Határozzuk meg a sorozat 2023-adik tagját! **7 pont**

Megoldás. Határozzuk meg az első néhány tagot a rekurziós összefüggés alapján!

$a_1 = 2$, $a_2 = \frac{1}{3}$, $a_3 = -\frac{1}{2}$, $a_4 = -3$, $a_5 = 2$. 2 pont

A rekurzió alapján innentől kezdve újra ugyanez a 4 szám ismétlődik: 2, $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{2}$, -3. 2 pont

Mivel a $2023 = 505 \cdot 4 + 3$, ezért a 2023 4-gyel osztva 3 maradékot ad, 1 pont

ezért a sorozat 2023-adik tagja megegyezik a harmadik taggal, tehát $a_{2023} = -\frac{1}{2}$. 2 pont

Összesen: **7 pont**

2. Az a és b pozitív egész számokra teljesül, hogy:

$$\frac{1}{\sqrt{a-\sqrt{a^2-1}}} - \frac{1}{\sqrt{a+\sqrt{a^2-1}}} = b$$

Mi lehet az a szám utolsó számjegye? **7 pont**

Megoldás. Gyöktelenítsük a nevezőket:

$$\frac{1}{\sqrt{a-\sqrt{a^2-1}}} - \frac{1}{\sqrt{a+\sqrt{a^2-1}}} = \frac{\sqrt{a+\sqrt{a^2-1}}}{\sqrt{a^2-(a^2-1)}} - \frac{\sqrt{a-\sqrt{a^2-1}}}{\sqrt{a^2-(a^2-1)}} =$$

$$= \sqrt{a+\sqrt{a^2-1}} - \sqrt{a-\sqrt{a^2-1}}$$ 1 pont

Tehát

$$\sqrt{a+\sqrt{a^2-1}} - \sqrt{a-\sqrt{a^2-1}} = b.$$

Mivel mindkét oldal pozitív, a négyzetre emelés ekvivalens lépés

$$a+\sqrt{a^2-1}+a-\sqrt{a^2-1}-2\sqrt{\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)\cdot\left(a-\sqrt{a^2-1}\right)} = b^2.$$ 1 pont

Ebből $2a-2=b^2$, $a=\dfrac{b^2}{2}+1$. Tehát a eggyel nagyobb egy négyzetszám felénél. Mivel a pozitív egész szám, ezért b páros szám kell, hogy legyen. 1 pont

Így az alábbi lehetőségeket kell figyelembe venni:

b	$10k$	$10k+2$	$10k+4$	$10k+6$	$10k+8$
$\dfrac{b^2}{2}+1$	$50k^2+1$	$50k^2+20k+3$	$50k^2+40k+9$	$50k^2+60k+19$	$50k^2+80k+33$

2 pont

Tehát a utolsó számjegye lehet 1, 3 vagy 9. 1 pont

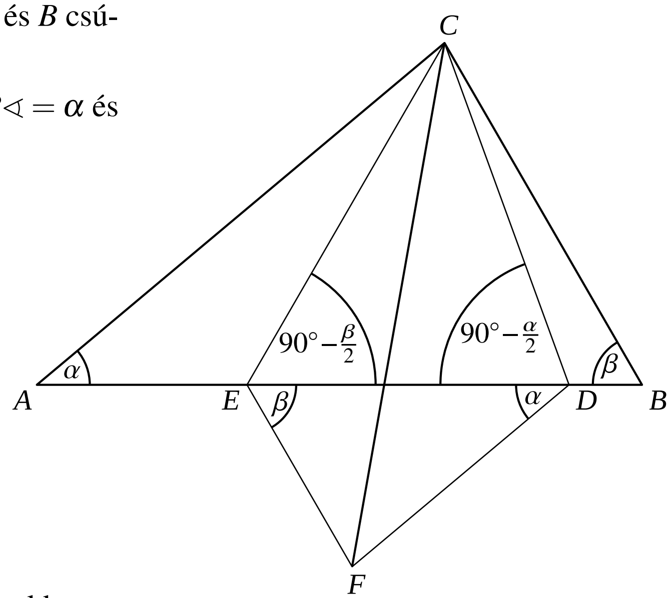
Ilyen utolsó számjegyek valóban elő is fordulhatnak. Ha pl. $b=2$, akkor $a=3$, ha $b=4$, akkor $a=9$, ha pedig $b=10$, akkor $a=51$. 1 pont

Összesen: **7 pont**

3. A nem egyenlő szárú ABC háromszög leghosszabb AB oldalán kijelölünk olyan D és E pontokat, amelyekre teljesül, hogy $AD=AC$ és $BE=BC$. A D ponton keresztül AC-vel és az E ponton keresztül BC-vel párhuzamosan húzott egyenesek az F pontban metszik egymást. Bizonyítsuk be, hogy FC felezi az EFD szöget. **7 pont**

Megoldás. Jelöljük az ABC háromszög A és B csúcsánál levő szögeit rendre α-val és β-val.

$DF \parallel AC$ és $EF \parallel BC$ miatt $FDE\sphericalangle = CAB\sphericalangle = \alpha$ és $DEF\sphericalangle = ABC\sphericalangle = \beta$ (váltószög-párok). 1 pont



Az ADC és BCE egyenlő szárú háromszögekben

$$ADC\sphericalangle = DCA\sphericalangle = \frac{180^\circ - CAD\sphericalangle}{2} = \frac{180^\circ-\alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

és

$$CEB\sphericalangle = BCE\sphericalangle = \frac{180^\circ - EBC\sphericalangle}{2} = \frac{180^\circ-\beta}{2} = 90^\circ - \frac{\beta}{2}.$$ 2 pont

Így DC és EC rendre a DEF háromszög D és E csúcsbéli külső szögfelezői. 2 pont

Ezek C metszéspontján áthalad a háromszög F csúcsbéli belső szögfelezője is. (C a DEF háromszög egyik hozzáírt körének középpontja.) Tehát FC valóban felezi az $EFD\sphericalangle$-et. 2 pont

Összesen: **7 pont**

4. Egy tízes számrendszerben felírt hatjegyű szám számjegyei mind különbözőek és egyik sem 0, valamint a szám osztható 37-tel. Bizonyítsuk, be hogy a számjegyeknek van még legalább 7 olyan sorrendje, ahol a kapott hatjegyű szám szintén osztható 37-tel! **7 pont**

Megoldás. Vizsgáljuk a 10 hatványainak 37-tel való osztási maradékait.

Az 1 37-tel osztva 1 maradékot ad, a 10 pedig 10-et.

$100 = 2 \cdot 37 + 26$, tehát a száz 26 maradékot ad.

$1000 = 20 \cdot 37 + 260 = 20 \cdot 37 + 7 \cdot 37 + 1$, vagyis az 1000 1 maradékot ad. 2 pont

Innentől kezdve mindig csak 10-zel szorzunk, a maradék is szorzódik 10-zel, tehát újra az 1, 10, 26 maradékokat kapjuk. 1 pont

Ebből következően egy $\overline{abcdef}$ hatjegyű szám 37-tel osztva $f + 10e + 26d + c + 10b + 26a$ maradékot ad. 1 pont

Azaz ha f és c, e és b, d és a számjegyeket egymás között cserélgetjük, akkor a maradék nem változik, vagyis a szám továbbra is osztható 37-tel. 2 pont

Ez összesen $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ lehetőség, ebből egy sorrend az eredeti, tehát legalább 7 új sorrend van. 1 pont

Összesen: **7 pont**