Haladók II. kategória 3. (döntő) forduló

Feladatok

1. Határozzuk meg az összes olyan n pozitív egész számot, amelynek létezik három olyan $a > b > c$ pozitív osztója, hogy $a^2 - b^2$, $b^2 - c^2$, $a^2 - c^2$ is osztója n-nek. **7 pont**

2. Az ABC hegyesszögű háromszögben $AC = BC$ és $AB < AC$. Az A csúcshoz tartozó magasság talppontját a BC oldalon jelöljük D-vel. Az AD egyenes az (A-tól különböző) E pontban metszi a háromszög körülírt körét, az AB oldal felezőmerőlegese pedig az L pontban metszi AD-t. A BL egyenes az AC oldalt az M, az ABC háromszög körülírt körét pedig az N pontban metszi. Továbbá az EN egyenesnek és az AB oldal felezőmerőlegesének metszéspontja Z. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $MZ \perp BC$. **7 pont**

3. Dániel gyümölcssalátát készít. A salátába alma, banán, citrom, dinnye és eper kerülhet.
– Az alma, banán, dinnye és eper ára darabonként 1 fabatka;
– egy darab citrom ára 2 fabatka;
– dinnyéből és eperből is csak egy-egy darab van már a zöldségesnél, míg almából, banánból és citromból „tetszőlegesen sok” kapható.

Dániel n fabatkányi (n pozitív egész) pénzét teljesen elköltve hányféleképpen vásárolhat gyümölcsöt?

(Például ha $n = 2$, akkor 9-féleképpen vásárolhat, hiszen (az egyes gyümölcsöket a kezdőbetűjükkel rövidítve) a lehetőségek: AA, AB, AD, AE, BB, BD, BE, C, és DE.) **7 pont**