Megoldások és javítási útmutató

1. Határozzuk meg az összes olyan n pozitív egész számot, amelynek létezik három olyan $a > b > c$ pozitív osztója, hogy $a^2 - b^2$, $b^2 - c^2$, $a^2 - c^2$ is osztója n-nek. **7 pont**

Megoldás. Tegyük fel, hogy $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$, $a > b > c$, $a \mid n$, $b \mid n$ és $c \mid n$. Ekkor az a, b, c számok között van legalább két azonos paritású. Bármelyik kettő is ez (jelölje őket u és v), azok összege $(u+v)$ és különbsége ($u - v$ vagy $v - u$) is páros, amelyek szorzata – akár $u^2 - v^2$, akár $v^2 - u^2$ a feltételek szerint szintén osztója n-nek – osztható 4-gyel, tehát $4 \mid n$. 1 pont

Ha az a, b, c számok közül bármelyik osztható 3-mal, akkor n is osztható 3-mal. Ellenkező esetben a három szám között van kettő olyan, amelyek 3-mal osztva azonos maradékot adnak. Bármelyik kettő is ez, azok különbsége osztható 3-mal, és a különbségük és az összegük szorzata – szintén n osztója – osztható 3-mal, azaz $3 \mid n$. 1 pont

Ha az a, b, c számok közül bármelyik osztható 5-tel, akkor n is osztható 5-tel. Ellenkező esetben az a^2, b^2, c^2 öttel való osztási maradéka csak 1 vagy 4 lehet, vagyis lesz közöttük kettő, amelyik 5-tel osztva azonos maradékot ad.

Ezek különbsége osztható 5-tel, így a különbségük és az összegük szorzata – szintén n osztója – is osztható 5-tel, ez alapján $5 \mid n$. 2 pont

Így a korábbi megállapításaink szerint $[3;4;5] = 60 \mid n$. 1 pont

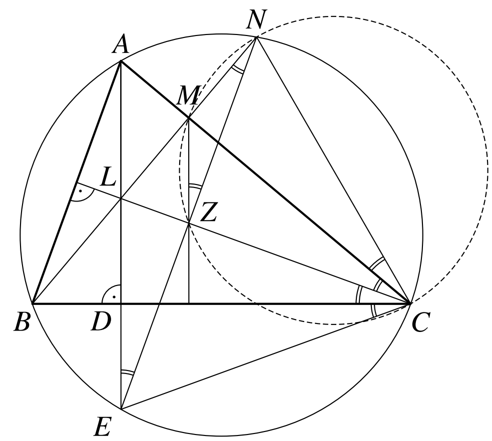
Ha $a = 4$, $b = 2$, $c = 1$, akkor $n = 60k$ ($k \in \mathbb{N}^+$) esetén, $4 \mid n$, $2 \mid n$, $1 \mid n$, továbbá $a^2 - b^2 = 12 \mid n$, $b^2 - c^2 = 3 \mid n$ és végül $a^2 - c^2 = 15 \mid n$.

Tehát a feladat feltételeinek a 60-nal osztható pozitív egész számok felelnek meg. 2 pont

Összesen: **7 pont**

2. Az ABC hegyesszögű háromszögben $AC = BC$ és $AB < AC$. Az A csúcshoz tartozó magasság talppontját a BC oldalon jelöljük D-vel. Az AD egyenes az (A-tól különböző) E pontban metszi a háromszög körülírt körét, az AB oldal felezőmerőlegese pedig az L pontban metszi AD-t. A BL egyenes az AC oldalt az M, az ABC háromszög körülírt körét pedig az N pontban metszi. Továbbá az EN egyenesnek és az AB oldal felezőmerőlegesének metszéspontja Z. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $MZ \perp BC$. **7 pont**

Megoldás. Használjuk a mellékelt ábrát és jelöléseit!



$AC = BC$ esetén az AB oldal felezőmerőlegese a háromszög szimmetriatengelye és a $BCA\sphericalangle$ szögfelezője is, így L a háromszög magasságpontja, továbbá L és E egymás tükörképei a BC egyenesre vonatkozóan. 1 pont

Így $ENB\sphericalangle = ECB\sphericalangle$ (mivel azonos íven nyugvó kerületi szögek), és $ECB\sphericalangle = LCB\sphericalangle = LCA\sphericalangle$ (a tengelyes szimmetria miatt). 2 pont

Tehát az MZ szakasz a C és N pontokból egyenlő szögek alatt látszik, azaz $CNMZ$ húrnégyszög. 1 pont

Így $MZN\sphericalangle = MCN\sphericalangle = ACN\sphericalangle = AEN\sphericalangle$, az első egyenlőség $CNMZ$, az utolsó egyenlőség pedig $AECN$ négyszög húrnégyszög volta miatt igaz. 2 pont

Mivel az AEN és MZN szögek egyik szögszára egy egyenesre esik, ezért $MZ \parallel AE$ és $AE \perp BC$ miatt $MZ \perp BC$. 1 pont

Összesen: **7 pont**

3. Dániel gyümölcssalátát készít. A salátába alma, banán, citrom, dinnye és eper kerülhet.
– Az alma, banán, dinnye és eper ára darabonként 1 fabatka;
– egy darab citrom ára 2 fabatka;
– dinnyéből és eperből is csak egy-egy darab van már a zöldségesnél, míg almából, banánból és citromból „tetszőlegesen sok” kapható.

Dániel n fabatkányi (n pozitív egész) pénzét teljesen elköltve hányféleképpen vásárolhat gyümölcsöt?

(Például ha $n = 2$, akkor 9-féleképpen vásárolhat, hiszen (az egyes gyümölcsöket a kezdőbetűjükkel rövidítve) a lehetőségek: AA, AB, AD, AE, BB, BD, BE, C, és DE.) **7 pont**

Megoldás. Jelölje a_n a kívánt sorozatunkat (azaz azt, ahányféleképpen vásárolhatunk n fabatkából.) a_n első pár értékét felírva ($a_0 = 1$,) $a_1 = 4$, $a_2 = 9$, $a_3 = 16$. Ez alapján a sejtésünk:

$$a_n = (n+1)^2$$ 1 pont

Jelölje most c_n azt a számot, ahányféleképpen n fabatkát elkölthetünk úgy, hogy nem veszünk citromot. c_n könnyen számolható esetszétválasztással aszerint, hogy a korlátozott mennyiségű dinnyéből és eperből hányat veszünk:

– ha dinnyéből és eperből egyet sem veszünk, akkor a maradék két gyümölcs vásárlására $(n+1)$ lehetőség van (aszerint, hogy 0, 1, 2, …, n darab almát veszünk);

– ha dinnyéből és eperből összesen egy darabot veszünk (ez eleve két lehetőség), akkor a maradék $(n-1)$ fabatkánkat n-féleképpen költhetjük el, azaz itt az esetek száma: $2n$;

– ha pedig egy-egy dinnyét és epret is veszünk, a maradék $(n-2)$ fabatkát $(n-1)$-féleképpen költhetjük el.

Ezek alapján $c_n = (n+1)+2n+(n-1) = 4n$. 1 pont

Most visszatérünk a_n-re. Aszerint, hogy n páratlan vagy páros, két eset van:

– Ha $n = 2k+1$, azaz páratlan, akkor

$$a_n = c_n + c_{n-2} + \ldots + c_3 + c_1$$

aszerint, hogy rendre 0, 1, … darab citromot veszünk. 1 pont

Ezek összege (az előző eredményeket felhasználva):

$$a_n = a_{2k+1} = 4\cdot(2k+1)+4\cdot(2k-1)+\ldots+4\cdot 3+4\cdot 1 = 4\cdot(1+3+5+\ldots+(2k+1)) =$$
$$= 4(k+1)^2 = (2k+2)^2 = (n+1)^2.$$ 1 pont

– Ha pedig $n = 2k$, azaz páros, akkor

$$a_n = c_n + c_{n-2} + \ldots + c_2 + 1$$

aszerint, hogy rendre 0, 1, … darab citromot veszünk – az „utolsó 1-es az összegben” az az egy eset, amikor minden pénzen citromot veszünk. 2 pont

Ezek összege (az előző eredményeket felhasználva):

$$a_n = a_{2k} = 4\cdot(2k)+4\cdot(2k-2)+\ldots+4\cdot 2+1 = 8\cdot(1+2+3+\ldots+k)+1 =$$
$$= 8\frac{k(k+1)}{2}+1 = 4k^2+4k+1 = (2k+1)^2 = (n+1)^2.$$ 1 pont

Ezzel beláttuk, hogy valóban $a_n = (n+1)^2$-féleképpen költheti el Dániel az n fabatkáját.

Összesen: 7 pont

2. megoldás – több diák dolgozata alapján. Az $n = 1$, $n = 2$ és $n = 3$ esetekben az összes lehetőség felsorolása után az $a_n = (n+1)^2$ sejtésünket teljes indukcióval is bizonyíthatjuk.

Tekintsük úgy, hogy Dániel bevásárlólistáján fordított ábécé sorrendben először az eper, majd a dinnye, harmadikként a citrom, utána a banán és végül az alma mennyisége van feltüntetve. Tegyük fel, hogy $n = k$-ig valóban $a_k = (k+1)^2$-féleképp költhető el k fabatka, tehát ennyiféle bevásárlólistája lehet Dánielnek.

Tekintsük a $(k+1)$ fabatkához tartozó listát, és nézzük meg, mire költhette Dániel az utolsó, $(k+1)$-edik fabatkáját.

– Ha ezt almára költötte, akkor az előtte lévő k-fabatkás lista bármi ennek megfelelő lehet, ez $(k+1)^2$ darab lehetőség az indukciós feltétel miatt.

– Ha az utolsó fabatkát banánra költötte, akkor az előtte lévő k fabatka egyikéért sem vehetett almát (a listán szereplő tételek sorrendje miatt). Az olyan k-fabatkás „rossz” listák száma, ahol az utolsó elem alma, éppen k^2 , ugyanis az előző $(k-1)$ fabatkát érő tetszőleges lista után egy almát téve kapjuk meg az ilyen listákat. A komplementer-elv miatt tehát az olyan $(k+1)$ fabatkát érő listák száma, melyben az utolsó fabatkáért banánt vett Dániel, $(k+1)^2-k^2$.

- Ha az utolsó fabatkát citromra költötte, akkor – mivel a citrom 2 fabatkába kerül, tehát a k-adik fabatka is ezen citrom árának része – azt kell megnéznünk, hogy az előző $(k-1)$ fabatkát hányféleképp költhette el Dániel. Citrom előtt a listán csak eper, dinnye és citrom szerepelhet, banán és alma nem, eperből és dinnyéből pedig csak 1-1 áll rendelkezésre. Ezért ezt a $(k-1)$ fabatkát csak kétféleképpen lehet elkölteni:
    - Ha $(k-1)$ páros, akkor vagy mind a $(k-1)$ fabatkáért citromot vett Dániel, vagy az első két fabatkán egy-egy epret és dinnyét, a maradék $(k-3)$ fabatkáért pedig csupa citromot vett.
    - Ha pedig $(k-1)$ páratlan, akkor az első fabatkáért megvette az eper és dinnye egyikét, majd a fennmaradó $(k-2)$ fabatkát csupa citromra költötte.
- Mivel $k \geq 3$ esetén nem lehet az összes fabatkát elkölteni csupán eperre és dinnyére, ezért nincs olyan eset, amikor a $(k+1)$-edik fabatkáért ezek egyikét vette volna.

Tehát $(k+1)$ fabatkát összesen $(k+1)^2+(k+1)^2-k^2+2$-féleképp lehet elkölteni, ami éppen $(k+2)^2$.

Ezzel a teljes indukciós bizonyítás módszere alapján készen vagyunk, n fabatkát Dániel valóban $(n+1)^2$-féleképp tud elkölteni.