Haladók III. kategória 1. forduló

Feladatok

1. Jelölje a_n az $\dfrac{n!}{2^n}$ tört tovább nem egyszerűsíthető alakjában a nevező értékét. Például $a_5 = 4$, mert

$$\frac{5!}{2^5} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{32} = \frac{120}{32} = \frac{15}{4}.$$

Tekintsük az $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2022}$ számokat.

a) Mennyi ezen 2022 darab szám minimuma, és ez a minimum hányszor szerepel a 2022 szám között?

b) Mennyi ezen 2022 darab szám maximuma, és ez a maximum hányszor szerepel a 2022 szám között? **7 pont**

2. Andor rendszeresen kerékpározik. Egy alkalommal, amikor hazaér a biciklizésből, testvére, Bendegúz kérdezi tőle, hogy mekkora távot tekert. Andor így felel: „Te jó vagy matekból, próbáld meg kitalálni. Azt elárulom, hogy összesen 2 óra 24 percet bicikliztem, valamekkora táv után visszafordultam, és ugyanazon az úton jöttem haza, amelyiken odafelé mentem. Lejtőn lefelé $45\ \dfrac{\text{km}}{\text{h}}$, emelkedőn felfelé $15\ \dfrac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel haladtam."

Bendegúz: „Gondolom, vízszintes része is volt az útnak."

Andor: „Volt, persze."

Bendegúz: „Akkor ennyi adatból még nem tudom megmondani, hogy mekkora távot teljesítettél."

Andor erre ezt mondja: „Ha azt is megmondanám, hogy vízszintes úton mekkora sebességgel haladtam, akkor már egyértelműen tudnál válaszolni, de ezt nem mondom meg."

Bendegúz némi számolás után így szólt: „Már tudom a választ." És valóban meg tudta mondani, hogy Andor hány kilométert biciklizett. Mi volt Bendegúz válasza? **7 pont**

3. Határozzuk meg azokat a nemnegatív egész számokból álló $(x;y)$ számpárokat, amelyekre

$$(xy-7)^2 = x^2 + y^2.$$

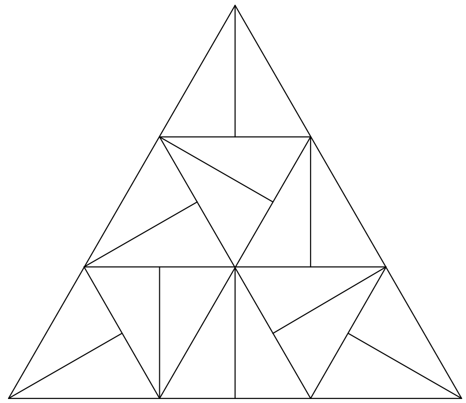
7 pont

4. Egy szabályos háromszög minden oldalát n egyenlő részre osztjuk, majd az osztáspontokon át a megfelelő oldalakkal párhuzamosakat húzva felosztjuk a háromszögünket n^2 darab kisebb szabályos háromszögre.

Ezek után a kisebb háromszögek közül néhánynak megrajzoljuk az egyik súlyvonalát arra figyelve, hogy egyetlen súlyvonalnak se legyen semelyik másik súlyvonallal közös (vég)pontja. Például az alábbi ábrán $n = 3$ esetén mind a kilenc kisebb háromszög egy-egy súlyvonalát megrajzoltuk.

Jelölje $s(n)$ azt a legnagyobb számot, amennyi súlyvonal szabályosan berajzolható adott n esetén.

(A lenti ábra alapján $s(3) = 9$ például.)



Adjuk meg $s(n)$ értékét minden n-re. **7 pont**

5. Az $ABCDE$ konvex ötszögben $EAB\sphericalangle = 60^\circ$, $ABC\sphericalangle = 100^\circ$ és $BCD\sphericalangle = 140^\circ$. Bizonyítsuk be, hogy az ötszög lefedhető egy olyan körrel, amelynek sugara $\frac{2}{3}DA$ hosszúságú. **7 pont**