Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

2022/2023-as tanév

Haladók III. kategória 1. forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Jelölje a_n az $\dfrac{n!}{2^n}$ tört tovább nem egyszerűsíthető alakjában a nevező értékét. Például $a_5 = 4$, mert

$$\frac{5!}{2^5} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{32} = \frac{120}{32} = \frac{15}{4}.$$

Tekintsük az $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2022}$ számokat.

a) Mennyi ezen 2022 darab szám minimuma, és ez a minimum hányszor szerepel a 2022 szám között?

b) Mennyi ezen 2022 darab szám maximuma, és ez a maximum hányszor szerepel a 2022 szám között? **7 pont**

Megoldás. Számítsuk ki az első néhány a_n-t:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a_n	2	2	4	2	4	4	8	2	4	4	8

Vegyük észre, hogy $n > 1$-től kezdve a_n-re teljesül a következő rekurzív összefüggés:

$$\begin{cases} a_{2n} = a_n, \\ a_{2n+1} = 2a_n. \end{cases}$$ 1 pont

Ezt fogjuk igazolni. Amint látszik a táblázatból, $a_1 = 2$-ből indulva „kicsi” n-ekre a_{2n} és a_{2n+1} értékét helyesen megadja a rekurzív képlet. Nézzük „általánosan” (a képletekben

$$(2n-1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1) \quad \text{és} \quad (2n)!! = 2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)$$

a „szemifaktorok”, és nyilván a $(2n-1)!!$ szemifaktor páratlan szám):

$$\frac{(2n)!}{2^{2n}} = \frac{(1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1))\,(2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n))}{2^n\cdot 2^n} = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\cdot\frac{(2n)!!}{2^n}$$

$$= \frac{(2n-1)!!}{2^n}\cdot\frac{2^n\cdot n!}{2^n} = (2n-1)!!\cdot\frac{n!}{2^n} \Rightarrow a_{2n} = a_n,$$

és

$$\frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}} = \frac{(1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n+1))\,(2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n))}{2^{n+1}\cdot 2^n} = \frac{(2n+1)!!}{2^{n+1}}\cdot\frac{(2n)!!}{2^n}$$

$$= \frac{(2n+1)!!}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n\cdot n!}{2^n} = (2n+1)!!\cdot\frac{n!}{2^{n+1}} \Rightarrow a_{2n+1} = 2\cdot a_n.$$

Ezzel a rekurzív képlet helyességét igazoltuk. 1 pont

Legyenek most $m_1 < m_2 < \ldots < m_k$ különböző nemnegatív egész kitevők, és legyen $n = 2^{m_1} + 2^{m_2} + \ldots + 2^{m_k}$ (azaz írjuk fel n bináris alakját)! Az előző rekurzív összefüggés miatt ekkor nyilván $a_n = 2^k$, hiszen $a_1 = 2$, és az $[n/2]$ szám bináris alakjának a végére 0-t téve (a szám páros lesz) nem változik a_n értéke, míg az $[n/2]$ szám bináris alakjának a végére 1-t téve (a szám páratlan lesz) a_n értéke kétszereződik.

Azaz a_n megegyezik 2^k-nal (ahol k az n szám bináris alakjában az 1-esek száma). 2 pont

Minimum: a_n kettőnél kisebb nyilván nem lehet, és $a_n = 2$ pontosan a kettő-hatványok esetén igaz (ezek bináris alakjában van egyetlen darab 1-es).

Azaz $a_n = 2$ a minimum, és ez pontosan $n = 1 = 2^0$; 2; 4; 8; 16; 32; 64; 128; 256; 512 és $n = 1024 = 2^{10}$ esetén teljesül, azaz 11 darab minimumhely van. 1 pont

Maximum: mivel 2023 binárisan 11-jegyű szám, de $2047 = 11111111111_2$ már nincs a vizsgált számok között, 1 és 2023 között legfeljebb 10 darab 1-es lehet az n egész szám bináris alakjában, azaz $a_n = 2^{10} = 1024$ a sorozat maximuma. 1 pont

Vizsgáljuk először, hogy $a_n = 1024$ (maximum) hány helyen fordul elő az 1023 és 2046 közötti számok között. Ezeket a számokat mind 11-jegyű bináris számnak tekintve (ez csak 1023 esetén „kiterjesztés" az 1023-at 01111111111_2-ként felírva) az egyetlen 0-s számjegy a bináris alakban 11 helyre tehető, ezek közül $11111111110_2 = 2046$; $11111111101_2 = 2045$; $11111111011_2 = 2043$; $11111110111_2 = 2039$; $11111101111_2 = 2031$ túl nagyok, és $11111011111_2 = 2015$ a legnagyobb megfelelő.

Azaz összesen 6 helyen veszi fel a_n a maximális 1024 értéket. 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. Andor rendszeresen kerékpározik. Egy alkalommal, amikor hazaér a biciklizésből, testvére, Bendegúz kérdezi tőle, hogy mekkora távot tekert. Andor így felel: „Te jó vagy matekból, próbáld meg kitalálni. Azt elárulom, hogy összesen 2 óra 24 percet bicikliztem, valamekkora táv után visszafordultam, és ugyanazon az úton jöttem haza, amelyiken odafelé mentem. Lejtőn lefelé $45\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$, emelkedőn felfelé $15\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel haladtam."

Bendegúz: „Gondolom, vízszintes része is volt az útnak."

Andor: „Volt, persze."

Bendegúz: „Akkor ennyi adatból még nem tudom megmondani, hogy mekkora távot teljesítettél."

Andor erre ezt mondja: „Ha azt is megmondanám, hogy vízszintes úton mekkora sebességgel haladtam, akkor már egyértelműen tudnál válaszolni, de ezt nem mondom meg."

Bendegúz némi számolás után így szólt: „Már tudom a választ." És valóban meg tudta mondani, hogy Andor hány kilométert biciklizett. Mi volt Bendegúz válasza? **7 pont**

1. megoldás. Az Andor által megtett út legyen s. Jelöljük rendre x-szel, y-nal és z-vel azt, hogy hány kilométer utat tett meg odafelé lejtőn, vízszintesen, illetve emelkedőn.

Ekkor $s = 2(x + y + z) = 2x + 2y + 2z$.

Jelöljük v-vel azt, hogy mekkora (hány km/h) sebességgel ment vízszintesen.

Ekkor az út odafalé $\frac{x}{45}+\frac{y}{v}+\frac{z}{15}$ óráig tartott, visszafelé pedig $\frac{x}{15}+\frac{y}{v}+\frac{z}{45}$ óráig.

A kettő együtt 2,4, azaz $\frac{x}{45}+\frac{y}{v}+\frac{z}{15}+\frac{x}{15}+\frac{y}{v}+\frac{z}{45}=2{,}4$. 1 pont

$$\frac{4x+4z}{45}+\frac{2y}{v}=2{,}4$$

$$\frac{2x+2z}{45}+\frac{y}{v}=1{,}2$$

$$\frac{s-2y}{45}+\frac{y}{v}=1{,}2$$

$$\frac{s}{45}+y\left(\frac{1}{v}-\frac{2}{45}\right)=1{,}2$$ 1 pont

Innen $s=54-\left(\frac{45}{v}-2\right)y$. 1 pont

Tehát az Andor által megtett út y-tól (ami nem 0) és v-től függ. Ha v ismeretében s értéke már egyértelműen megmondható, akkor ez csak úgy lehetséges, hogy az y szorzótényezője nulla, azaz $\left(\frac{45}{v}-2\right)=0$, 3 pont

innen $v=22{,}5$, és $s=54$.

Tehát 54 km-t biciklizett Andor. 1 pont

2. megoldás. A megtett út a menetidő és az átlagsebesség szorzata. A menetidő adott, ezért Bendegúznak a teljes útra vonatkozó átlagsebességet kell kitalálni. 1 pont

Ha eltekintünk a vízszintes útszakasztól, és kiszámítjuk az emelkedős és a lejtős részeken történő mozgás átlagsebességét, akkor $\frac{2x+2z}{\frac{x}{45}+\frac{z}{15}+\frac{x}{15}+\frac{z}{45}}=\frac{2x+2z}{\frac{4x+4z}{45}}=22{,}5$-et kapunk. (15 és 45 harmonikus közepe.) 2 pont

Ha a vízszintes útszakaszon mért sebesség ettől eltérő lenne, akkor az egész távra vonatkozó átlagsebesség függene attól, hogy a teljes távnak mekkora része a vízszintes rész. Erre azonban nincs utalás a feladat szövegében. Mivel a válasz ettől az információtól függetlenül is megadható, feltéve, hogy a vízszintes útszakaszon mért sebességet ismerjük, ez csak úgy lehetséges, hogy a vízszintes útszakaszon is $22{,}5\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ volt a sebessége. 3 pont

Tehát a teljes táv $22{,}5\cdot 2{,}4=54$ km. 1 pont

Összesen: **7 pont**

3. Határozzuk meg azokat a nemnegatív egész számokból álló $(x;y)$ számpárokat, amelyekre

$$(xy-7)^2 = x^2+y^2.$$ **7 pont**

Megoldás.

$$(xy-7)^2 = x^2+y^2$$

$$x^2y^2-14xy+49 = x^2+y^2$$

$$x^2y^2-12xy+36+13 = x^2+2xy+y^2$$ 1 pont

$$(xy-6)^2+13 = (x+y)^2$$ 1 pont

$$(xy-6)^2-(x+y)^2 = -13$$

$$\big[(xy-6)-(x+y)\big]\big[(xy-6)+(x+y)\big] = -13$$ 1 pont

Figyelembe véve, hogy a bal oldali szorzat első tényezője nem nagyobb, mint a második, ezért a lehetséges esetek:

a) $(xy-6)-(x+y) = -1$ és $(xy-6)+(x+y) = 13$.

Ebből $xy-(x+y) = 5$ és $xy+(x+y) = 19$ adódik, amiből $xy = 12$ és $x+y = 7$.

A kapott megoldások: $x_1 = 4$, $y_1 = 3$ és $x_2 = 3$, $y_2 = 4$.

b) $(xy-6)-(x+y) = -13$ és $(xy-6)+(x+y) = 1$.

Ebből $xy-(x+y) = -7$ és $xy+(x+y) = 7$ adódik, amiből $xy = 0$ és $x+y = 7$.

A kapott megoldások: $x_3 = 7$, $y_3 = 0$ és $x_4 = 0$, $y_4 = 7$. 3 pont

A kapott $(x;y)$ számpárok kielégítik az egyenletet, így a megoldások:

$$M = \big\{(x;y) \mid (4;3),(3;4),(7;0),(0;7)\big\}.$$ 1 pont

Összesen: **7 pont**

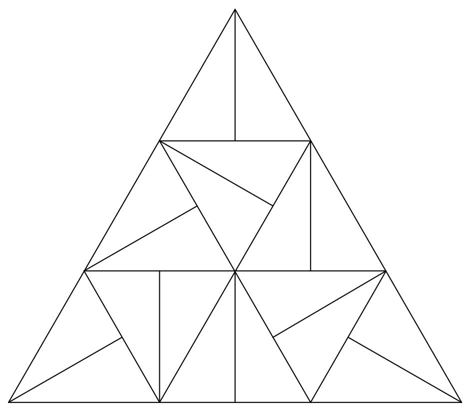
Megjegyzés. A 3 pont elosztása: 1 pont jár a szorzattá bontás helyes eseteinek megállapításáért, további 1-1 pont ezek megoldásáért.

4. Egy szabályos háromszög minden oldalát n egyenlő részre osztjuk, majd az osztáspontokon át a megfelelő oldalakkal párhuzamosakat húzva felosztjuk a háromszögünket n^2 darab kisebb szabályos háromszögre.

Ezek után a kisebb háromszögek közül néhánynak megrajzoljuk az egyik súlyvonalát arra figyelve, hogy egyetlen súlyvonalnak se legyen semelyik másik súlyvonallal közös (vég)pontja. Például az alábbi ábrán $n = 3$ esetén mind a kilenc kisebb háromszög egy-egy súlyvonalát megrajzoltuk.

Jelölje $s(n)$ azt a legnagyobb számot, amennyi súlyvonal szabályosan berajzolható adott n esetén.

(A lenti ábra alapján $s(3) = 9$ például.)



Adjuk meg $s(n)$ értékét minden n-re. **7 pont**

Megoldás. A válasz: $n = 1$; 2; 3 esetén nyilván rendre 1, 4 és 9, azaz $s(n) = n^2$. (Ekkor a „megoldások" a fenti ábráról leolvashatóak.) 1 pont

Azt fogjuk megmutatni, hogy $s_n \leq \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.

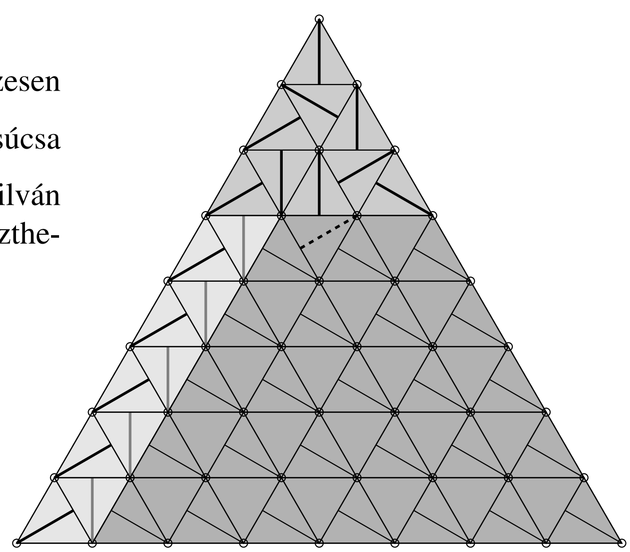
(Ez csak $n \geq 4$ esetén „korlátoz", mivel $n = 1, 2, 3$ esetén n^2, azaz rendre $1, 4$ és 9 kisebb, mint $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$, azaz rendre $3, 6$ és 10.)

Tekintsük a mellékelt ábrát!

Adott n esetén az n^2 kis háromszögnek összesen $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ – az ábrán karikával jelölt – csúcsa van (ez $n = 1$; 2; 3 esetén több, mint n^2), és nyilván minden csúcsra legfeljebb egy súlyvonal illeszthető. Emiatt

$$s(n) \leq \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

valóban.



Másfelől a fenti, „triviálisan folytatható” ábra mutatja, hogy $n > 3$ esetén megadhatóak úgy a súlyvonalak, hogy bármely csúcsra pontosan egy súlyvonal illeszkedjen. Minden lépésben az előző n-re adott megoldást bővítjük tovább úgy, hogy alulra felveszünk egy új sort, és az alább megadott módon az itt keletkezett új háromszögek közül a megfelelőekbe behúzunk új súlyvonalakat.

A 4. sorba bekerül egy, az ábrán szaggatottan jelölt súlyvonal is, amelynek megfelelő súlyvonal nagyobb n-ek esetén nem lesz, ez itt azért van, hogy a felette lévő sor egyetlen szabad csúcsára is illeszkedjen súlyvonal.

A továbbiakban a következő, $n+1$-edik sorban pedig a következőképpen járunk el:

– a balról nézve első kisebb háromszög bal alsó csúcsát a jobb oldal felezőpontjával kötjük össze,

– a balról második kisebb háromszög alsó csúcsát a felső oldal felezőpontjával kötjük össze (ez az egyetlen olyan háromszög, amely olyan csúccsal/oldalfelező ponttal van összekötve, amely a korábbi n^2 háromszög valamely csúcsa/oldalfelező pontja, de a felhasznált oldalfelező pont a konstrukcióból következően szabad),

– a balról 3-adik, 5-ödik, 7-edik, $\ldots$, $(2n+1)$-edik (összesen n darab) kisebb háromszögnek pedig a jobb alsó csúcsát a bal oldalának a felezőpontjával kötjük össze.

Így a legalsó, $(n+1)$-edik szinten minden újabb csúcsra (a számuk pontosan $(n+2)$) egy-egy szabályosan behúzott súlyvonalat rajzoltunk, és mivel az új ábrán is igaz az, hogy minden csúcsra pontosan egy súlyvonal illeszkedik, ezzel igazoltuk, hogy az $s(n) = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ súlyvonal megrajzolása elérhető, azaz $s(n) \geq \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Többféle „jó konstrukció” elképzelhető, ennek a résznek a kifejtését – mivel meglehetősen „triviális” – nem szükséges ennyire precízen leírni. 2 pont

Az eddigieket összevetve adódik a válasz: $s(n)$ valóban

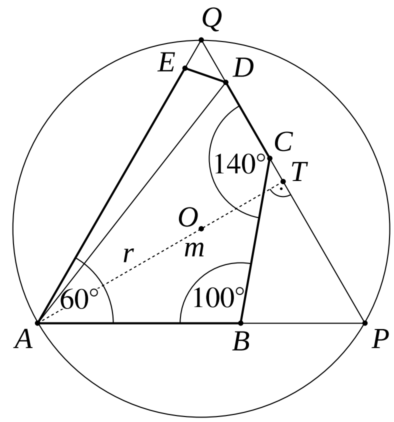
$$s(n) = \min\left(n^2; \frac{(n+1)(n+2)}{2}\right) \text{ vagy } s(n) = \begin{cases} n^2, & \text{ha } n < 4 \\ \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}, & \text{ha } n \geq 4 \end{cases}$$

A válasz valamilyen formában (esetszétválasztással) 1 pont

Összesen: **7 pont**

5. Az $ABCDE$ konvex ötszögben $EAB\sphericalangle = 60^\circ$, $ABC\sphericalangle = 100^\circ$ és $BCD\sphericalangle = 140^\circ$. Bizonyítsuk be, hogy az ötszög lefedhető egy olyan körrel, amelynek sugara $\frac{2}{3}DA$ hosszúságú. **7 pont**

Megoldás.



Az $ABCDE$ konvex ötszög B és C csúcsánál levő külső szöge rendre 80° és 40°. Ezek összege kisebb 180°-nál, így az AB és CD oldalegyenesek metszik egymást. Jelöljük a metszéspontjukat P-vel. 1 pont

Ekkor

$$BPC\sphericalangle = 180^\circ - CBP\sphericalangle - PCB\sphericalangle = 180^\circ - 80^\circ - 40^\circ = 60^\circ.$$ 1 pont

Mivel az $EAB\sphericalangle$ és az $APD\sphericalangle$ összege kisebb 180°-nál, ezért az ötszög CD és EA oldalegyenesei is metszik egymást. Legyen ezek metszéspontja Q. Az APQ háromszögben az A és P csúcsoknál levő szögek 60°-osak, ezért a háromszög szabályos. 1 pont

Ez a háromszög tartalmazza az $ABCDE$ ötszöget, így a háromszög körülírt köre lefedi az ötszöget is. 2 pont

Jelöljük az APQ háromszög körülírt körének a sugarát r-rel, a magasságát m-mel, az A csúcshoz tartozó magasság talppontját T-vel. Ekkor

$$r = \frac{2m}{3} = \frac{2}{3}AT \leqslant \frac{2}{3}AD.$$

Ezzel az állítást beláttuk. 2 pont

Összesen: **7 pont**