Megoldások és javítási útmutató

1. Bizonyítsuk be, hogy egyetlen olyan n pozitív egész szám van, amelyre $3n+1$ és $7n+4$ is négyzetszám, valamint $n+7$ prímszám. **7 pont**

Megoldás. Legyen $7n+4=a^2$ és $3n+1=b^2$ (az a és b pozitív egészekre). Az első egyenlet 4-szereséből kivonva a második 9-szeresét, azt kapjuk, hogy

$$4(7n+4)-9(3n+1)=n+7=4a^2-9b^2=(2a-3b)(2a+3b).$$ 2 pont

Mivel a és b pozitív egészek, ezért $2a+3b$ nagyobb 1-nél. Tehát $n+7$ csak akkor lehet prím, ha $2a-3b=1$. Vizsgáljuk ezt az esetet! 2 pont

$2a=3b+1$. Négyzetre emelés után $4a^2=9b^2+6b+1$, majd $4a^2-9b^2=6b+1$ adódik.

Figyelembe véve, hogy $4a^2-9b^2=n+7$, az $n+6=6b$ összefüggést kapjuk. 1 pont

Ezt négyzetre emelve és $b^2=3n+1$-et felhasználva $n^2+12n+36=36b^2=36(3n+1)$, ahonnan ($n\neq 0$ miatt) $n=96$ adódik. 1 pont

Még ellenőriznünk kell, hogy $3n+1$ és $7n+4$ valóban négyzetszám, valamint $n+7$ prímszám-e.

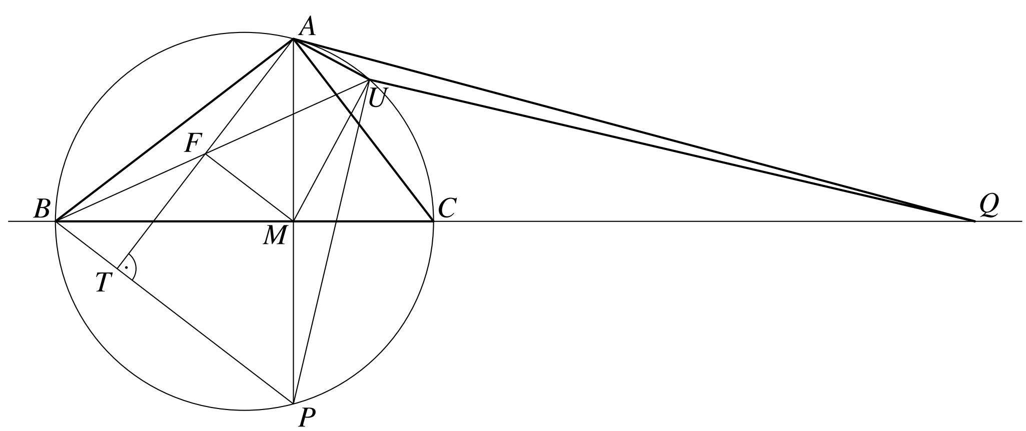
$3n+1=289=17^2$ és $7n+4=676=26^2$, továbbá $n+7=103$, ami prímszám. 1 pont

Azaz valóban $n=96$ az egyetlen megfelelő pozitív egész.

Összesen: **7 pont**

2. Az A-nál derékszögű ABC háromszögben $AB>AC$. Legyen az A pont BC egyenesre vonatkozó tükörképe P, az A-ból BP-re állított merőleges talppontja T, míg AT szakasz felezőpontját jelölje F. Az ABC háromszög köréírt k köréhez A-ban húzott érintő a BC egyenest Q-ban metszi, míg a BF egyenes és k (B-től különböző) metszéspontja U. Igazoljuk, hogy a BQ egyenes érinti az AUQ háromszög köréírt körét! **7 pont**

1. megoldás. Használjuk az alábbi ábrát és jelöléseit.



A tükrözéssel kapott P pont rajta van BC szakasz Thalész-körén. FM középvonal ATP háromszögben, és párhuzamos TP-vel, ezért $UFM\sphericalangle=UBP\sphericalangle=UAP\sphericalangle$ (az utóbbi két szög azért egyenlő, mert a Thalész-körben egy ívhez tartozó kerületi szögek). 1 pont

$AFMU$ húrnégyszög, hiszen A-ból és F-ből MU szakasz ugyanakkora szögben látszik.

Az $AFMU$ húrnégyszögben $FAM\sphericalangle = FUM\sphericalangle$. 1 pont

$BAT\sphericalangle = BAP\sphericalangle - TAP\sphericalangle = BUP\sphericalangle - BUM\sphericalangle = MUP\sphericalangle$, hiszen azonos íven nyugvó kerületi szögek a Thalész-körben, valamint az $AFMU$ húrnégyszög köréírt körében. 1 pont

$ABP\sphericalangle = MAQ\sphericalangle$, mivel az ABC körben a PA íven nyugvó kerületi, illetve érintőszárú kerületi szögek. 1 pont

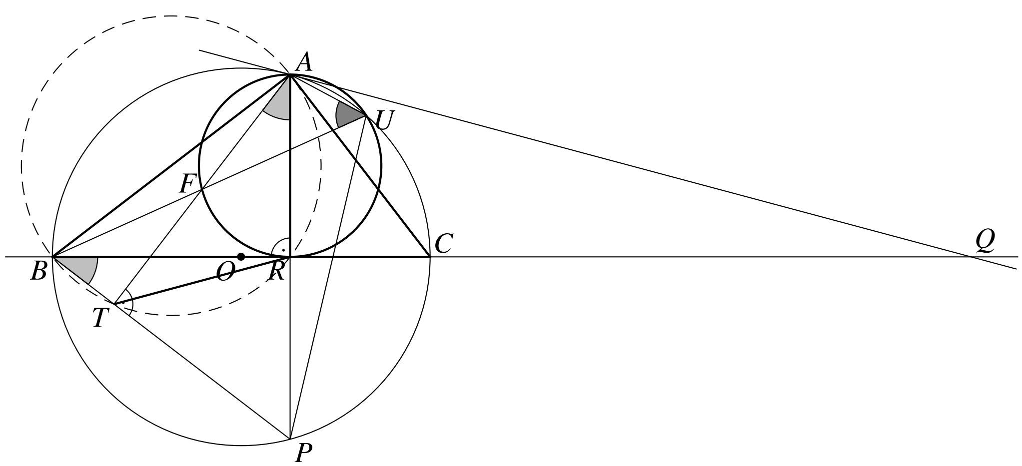
Továbbá a megfelelő derékszögű háromszögekben a szögösszeget, valamint a BQ-ra való szimmetriát felhasználva adódik: $BAT\sphericalangle = 90^\circ - ABT\sphericalangle = 90^\circ - MAQ\sphericalangle = AQM\sphericalangle = PQM\sphericalangle$. 1 pont

De $BAT\sphericalangle = MUP\sphericalangle$, tehát $MUP\sphericalangle = PQM\sphericalangle$. Ebből következően az $MPQU$ négyszög húrnégyszög, emiatt $UQM\sphericalangle = UPM\sphericalangle$, 1 pont

valamint $UPM\sphericalangle = ABU\sphericalangle = UAQ\sphericalangle$. Mivel az $UAQ\sphericalangle$ az UAQ háromszög köré írható körében az UQ ivhez tartozó kerületi szög, mely az előzőek alapján megegyezik $UQM\sphericalangle$-gel, így BQ nem lehet más, csak a AUQ köréírt körének érintője Q-ban. 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. megoldás. Használjuk az alábbi ábrát! Az új O pont az ABC kör középpontja.



Tekintsük AB Thalész-körét (szaggatott kör). Ez BC egyenesét messe a (B-től különböző) R pontban. Ekkor $BRA\sphericalangle = 90^\circ$, és A, R és P egy egyenesen vannak. $TAR\sphericalangle = TBR\sphericalangle = ABR\sphericalangle = ATR\sphericalangle$ egy húron nyugvó kerületi szögek és a tengelyes tükrözés miatt. Azaz ATR háromszög egyenlőszárú, és $AR = TR$. 2 pont

$AUB\sphericalangle = APB\sphericalangle$, hiszen egy húrhoz tartoznak ABC körén, továbbá $APB\sphericalangle = APT\sphericalangle = ARF\sphericalangle$, hiszen ARF háromszög az APT háromszöghöz hasonló – mivel RF az APT középvonala – azaz $AUF\sphericalangle = ARF\sphericalangle$. 1 pont

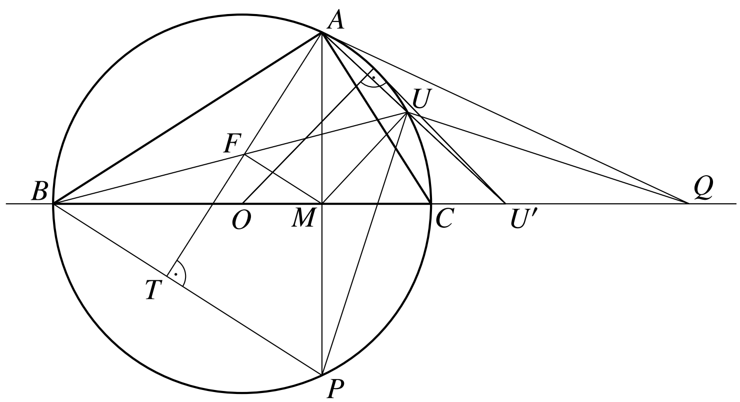
Így A, U, R, F egy körön vannak, és mivel $AFR\sphericalangle = 90^\circ$, ez AR Thalész-köre. Ez a kör BC egyenesét R pontban érinti. 1 pont

Vegyük R pont inverz képét ABC körére. Mivel $OAQ\sphericalangle = 90^\circ$ az OAQ háromszögben OA sugár, valamint AQ érintő, így a befogótétel miatt R inverz képe éppen Q. 2 pont

De akkor (az inverziónál $A' = A$, $U' = U$ és $R' = Q$) $AFRU$ körének inverz képe éppen AUQ köre, és mivel $AFRU$ köre érintette BC egyenesét, az inverze, azaz AUQ köre érinti BC inverzét, azaz BC-t. Pontosan ezt akartuk bizonyítani. 1 pont

Összesen: **7 pont**

3. megoldás. Használjuk az alábbi ábrát! Jelölje U' a BC egyenes és az AU egyenes metszéspontját.



Belátjuk, hogy U' felezi az MQ szakaszt: ehhez először vegyük észre, hogy az MAQ és a BTA háromszög hasonló, hiszen mindkettő derékszögű, és $MAQ\sphericalangle = PAQ\sphericalangle = PBA\sphericalangle = TBA\sphericalangle$ ahol a középső egyenlőség az érintő szárú kerületi szögek tételéből következik. Ezután azt kell még észrevenni, hogy az $U'AQ\sphericalangle$ és az $FBA\sphericalangle$ szögek is egyenlők (mindkettő az AU íven nyugvó kerületi szög), így AU' is súlyvonal az MAQ háromszögben, azaz U' felezi az MQ szakaszt.

Ezek után az U' pont AUQ körre vonatkozó hatványa alapján az érintéshez elég azt belátni, hogy $U'U \cdot U'A = U'Q^2$ (hiszen ekkor $U'Q$ és így BC egyenese is érinti AUQ körét).

Vegyük fel az MQ szakasz k Thalész körét, ennek középpontja U'. A bizonyítandó állítás azt mondja, hogy az U' pontnak az eredeti körre vonatkozó hatványa megegyezik k sugarának a négyzetvével. Ez viszont ismert módon (és könnyen beláthatóan) azt jelenti, hogy k és az eredeti ABC köré írt kör merőlegesek egymásra (azaz a metszéspontjukat a középpontokkal összekötő sugarak merőlegesek egymásra). Mivel ez szimmetrikus viszony két kör között, elég belátni, hogy O-nak a k-ra vonatkozó hatványa egyenlő az eredeti kör sugarának a négyzetével, azaz $OM \cdot OQ = OA^2$.

Ez pedig azonnal következik az OAQ derékszögű háromszögre felírt befogó-tételből. Ezzel készen vagyunk.

3. Dániel bácsinak 6 kutyája és 6 macskája van. Mivel Dániel bácsi szeret fotózni, az állatairól készített néhány fényképet. A képek előhívása után a következőket vette észre.

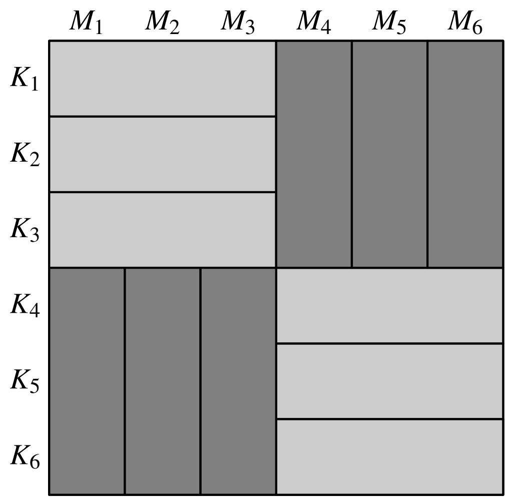
– Mind a 36 lehetséges kutya-macska párosra volt olyan kép, amelyen ez a két állat (esetleg más állatokkal együtt) egy képen szerepelt.

– Egyetlen képen sem szerepelt mindkét fajta állatból egyszerre több. (Az előfordulhatott, hogy egy képen egy kutya és több macska volt, vagy egy macska és több kutya volt.)

– Bármely állat legfeljebb négy képen szerepelt.

Hány fotót készített Dániel bácsi? **7 pont**

Megoldás. Megmutatjuk, hogy 12 fotó elkészíthető a feltételek szerint, de semmilyen más számú fotó nem. A „konstrukció” az alábbi ábrán látható:



Egy-egy téglalap „jelent” egy-egy fényképet. A téglalap sora(i) mellett lévő K_i bejegyzések jelentik, hogy mely kutyák, és az oszlopa(i) felett lévő M_i bejegyzések, mely macskák szerepelnek az adott fotón. Például a K_2 kutya mellett lévő, világosszürkével jelölt fotón a második kutyus, és az első három macska szerepel.

Megjegyzés. Valamilyen jó konstrukcióért – 2 pont

Világos, hogy a megadott konstrukció (12 fényképpel) teljesíti a feladat feltételeit. Most megmutatjuk, hogy más mennyiségű fénykép nem készülhetett (sem több, sem kevesebb).

Hasonlóan az ábránkhoz vegyünk fel egy 6×6-os táblázatot. A táblázat i-edik oszlopa az i-edik macskát, j-edik sora a j-edik kutyát fogja jelenteni. A táblázat minden mezőjét egyértelműen ki fogjuk színezni két szín (sötétszürke vagy világosszürke) valamelyikével a következő módon:

– Legyenek a fotók az állatokról f_1; f_2; $\ldots$; f_n.

– Keressük meg az első sorszámú olyan f_k fotót (lehet több fotó is, azok közül az elsőt választjuk az egyértelműség miatt), amelyiken egyszerre szerepel az i-edik macska és a j-edik kutya.

Megjegyzés. Valamilyen hasonló táblázatos vagy gráfos modellért – 1 pont

– Ha ezen a fotón több macska van, mint kutya, akkor a táblázat $t_{i,j}$ (i-edik oszlop/j-edik sor) mezőjét színezzük világos szürkére.

– Ha pedig ezen a fotón legalább annyi kutya van, mint macska, akkor a táblázat $t_{i,j}$ mezőjét színezzük sötét szürkére.

Ez a színezés egyértelmű (adott fotósorozat esetén), és minden mezőt kiszínez. 1 pont

Nézzük meg, hogy a teljes táblázat 36 mezője közül mennyi lehet világosszürke. Az i-edik oszlopban legfeljebb 3 világosszürke mező lehet, mert az ezeket jelentő fotókon megfelelő j-edik kutya „magányos” (a többi állat a fotón cica). Ha háromnál több ilyen fotó lenne, akkor egyszerre nem lehetne igaz az, hogy az i-edik macskának van mind a hat kutyával közös fotója, illetve az, hogy az i-edik macskának legfeljebb 4 fotója van. Azaz az i-edik oszlopban (bármely i-re) legfeljebb 3 világosszürke mező lehet. 1 pont

Így a teljes táblázat összesen 6 oszlopában legfeljebb 18 világosszürke mező lehet. Teljesen hasonlóan minden sorban legfeljebb 3 sötétszürke mező lehet, és így a táblázatban legfeljebb 18 sötétszürke mező lehet. Mivel a táblázat mind a 36 mezőjét kiszínezzük (egy megfelelő fotósorozat esetén) ez csak úgy lehet, hogy minden sorban/oszlopban pontosan 3 sötétszürke és 3 világosszürke mező van. 1 pont

Vizsgáljuk valamely, mondjuk az i-edik oszlopot. Mivel ebben 3 világosszürke mező van, van három olyan fénykép, ahol az i-edik macska egy-egy magányos kutyával (és néhány másik macskával van lefényképezve). Emiatt viszont – mivel minden állat legfeljebb 4 képen szerepel – a maradék három kutyával az i-edik macskának egy csoportképre kell kerülnie („magányos cicaként”).

Ez minden sor és minden oszlop esetén elmondható, azaz bármely állathoz lesz pontosan egy olyan fotó, ahol ő magányos. Rendeljük az adott állathoz ezt a fotót. (A példánknál a a K_2 címke melletti, világosszürke téglalappal jelölt fotót a 2-es kutyához rendeljük). Ezzel egy bijekciót létesítettünk az állatok és a fotók között. Így a fotók száma pontosan 12. 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. megoldás – Keresztély Zsófia dolgozata alapján. Jelöljük a fotók számát n-nel, és legyen $k_1, k_2, \ldots, k_n$ az egyes fotókon szereplő állatok száma. Mivel minden állat legfeljebb 4 képen szerepelt: $\sum_{i=1}^{n} k_i \leq 48$.

Amennyiben az i-edik fotón kutya és macska is szerepelt, az ezen a képen szereplő kutya-macska párosok száma: $k_i - 1$, míg ha a fotón csak egyfajta állat (vagy csak kutya, vagy csak macska) szerepel a kutya-macska párosok száma 0. Ezek alapján az összes fotón szereplő kutya-macska párosok száma legfeljebb $\sum_{i=1}^{n}(k_i - 1) = \left(\sum_{i=1}^{n} k_i\right) - n$. (Ennyi páros pontosan akkor valósul meg, ha minden képen szerepel kutya és macska is.)

Másfelől a fotózott párok száma legalább $6 \cdot 6 = 36$ (hiszen minden kutya-macska pároshoz van közös kép). Ezek alapján

$$\left(\sum_{i=1}^{n} k_i\right) - n \geq \text{a fotókon szereplő kutya-macska párok száma} \geq 36.$$

A korábbiak miatt $48 - n = \left(\sum_{i=1}^{n} k_i\right) - n \geq 36$ és innen $12 \geq n$ adódik. Azaz legfeljebb 12 fotó készült.

Megmutatjuk azt is, hogy legalább 12 fotó készült. Ehhez indirekt tegyük fel, hogy legfeljebb 11 fotó készült. Ekkor legfeljebb 11 állatra lehet igaz, hogy van olyan fotó, ahol ő (magányos állatként) több másik fajtájú állattal együtt szerepel, azaz van legalább egy olyan állat, amely minden róla készült képen legfeljebb egy más fajtájú állattal van. Ehhez viszont az adott állatról – a feltételek alapján – legalább 6 fotónak kellene készülnie, ami ellentmondás. Azaz legalább 12 fotó készült.

A két részt összevetve pontosan 12 fotó készült. Pontosan 12 fotó viszont készülhetett, ezt az első megoldásban megmutatott konstrukció igazolja.