Megoldások és javítási útmutató

1. Hány olyan 2023-nál nem nagyobb pozitív egész szám van, amelyre teljesül, hogy a szám tizenötszörösének pontosan négyszer annyi (pozitív) osztója van, mint az eredeti számnak? **10 pont**

Megoldás. Az 1 megoldás, hiszen az 1-nek egy, a 15-nek négy darab (1, 3, 5, 15) osztója van. 1 pont

Tegyük fel, hogy egy 1-nél nagyobb pozitív egész N számnak k darab osztója van, ezek legyenek nagyság szerinti sorrendben: $a_1 = 1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_k = N$.

Ezek a számok mind osztói $15N$-nek is, és ezeken kívül $15N$ osztható az alábbiakkal is:

$$3a_1, 3a_2, 3a_3, \ldots, 3a_k$$
$$5a_1, 5a_2, 5a_3, \ldots, 5a_k$$
$$15a_1, 15a_2, 15a_3, \ldots, 15a_k$$

1 pont

A felsoroltaktól eltérő számmal $15N$ nem lehet osztható, hiszen prímtényezős felbontásában egy 3-as és egy 5-ös tényezővel van több, mint N prímtényezős felbontásában. 1 pont

Ez összesen négyszer annyi szám, mint N osztóinak száma, a $15N$-nek tehát pontosan akkor van négyszer annyi osztója, mint N-nek, ha a felsorolt számok mind különbözőek. 1 pont

Mivel $a_1 = 1$, így $3a_1 = 3$ és $5a_1 = 5$, és ezek nem lehetnek felsorolva N osztói között, így szükséges feltétel, hogy N ne legyen osztható sem 3-mal, sem 5-tel. 1 pont

Ha N nem osztható sem 3-mal, sem 5-tel, akkor a felsorolt osztók valóban mind különbözőek, hiszen az első sor elemei sem 5-tel, sem 3-mal nem oszthatóak, a második sor elemei 3-mal igen, de 5-tel nem, a harmadik sorban felsorolt számok 5-tel igen, de 3-mal nem, míg a negyedik sor elemei mindkét számmal oszthatóak. 1 pont

Azt kell tehát megállapítanunk, hogy hány olyan 2023-nál nem nagyobb pozitív szám van, amely sem 3-mal, sem 5-tel nem osztható. 1 pont

A 2023-nál nem nagyobb pozitív egészek közül: 3-mal osztható: 674 darab, 5-tel osztható: 404 darab, 15-tel osztható: 134 darab. 1 pont

Tehát a 2023-nál nem nagyobb pozitív egészek közül azok darabszáma, amelyek 3-mal vagy 5-tel oszthatóak: $674 + 404 - 134 = 944$. 1 pont

A többi 2023-nál nem nagyobb pozitív egész az, ami sem 3-mal, sem 5-tel nem osztható, tehát összesen $2023 - 944 = 1079$ keresett tulajdonságú szám van. 1 pont

Összesen: **10 pont**

2. Egy játékban egységoldalú szabályos háromszög alakú lapokból lehet egységnyi élhosszúságú szabályos tetraédereket építeni. Minden háromszög piros, kék, sárga vagy zöld színű. A háromszögekből egy-egy tetraéderhez négyet-négyet felhasználva éppen meg lehet építeni az összes különböző szabályos tetraédert. Két tetraédert akkor tekintünk különbözőnek, ha azok forgatással nem vihetők egymásba. Hány háromszögből áll a készlet? **10 pont**

1. megoldás. Minden színből ugyanannyira lesz szükség, ezért számoljuk meg, hogy hány piros háromszög van a készletben! 1 pont

Ehhez vegyük sorra, hogy hány piros lapja lehet egy tetraédernek:

Egyféle olyan tetraéder építhető, amelynek minden lapja piros, ehhez 4 háromszög kell. 1 pont

Három olyan tetraéder van, amelynek három lapja piros, egy pedig pirostól eltérő színű. Ezek megépítéséhez $3 \cdot 3 = 9$ háromszög kell. 1 pont

Két piros lapja kétféle módon lehet egy tetraédernek: vagy a másik két lap is egyező színű vagy azok különbözőek. Háromféle olyan van, ahol a másik két lap is egyező, ezekhez $3 \cdot 2 = 6$ piros háromszög kell. 1 pont

Háromféle olyan van, ahol a másik két lap különböző színű, ez $3 \cdot 2 = 6$ piros háromszöget jelent. (Egy színt nem használunk a piroson kívüli háromból.) 1 pont

Egy piros lapja háromféle módon lehet egy tetraédernek:

Lehet a másik három lap egyforma: ilyenből 3 van, ezekhez 3 piros háromszög kell. 1 pont

Lehet a másik három lap kétféle színű: ilyenből 6 van $(3 \cdot 2)$, ezekhez 6 piros háromszög kell. 1 pont

Lehet a másik három lap csupa különböző színű, ilyenből kettő van, mert ezek forgatással nem vihetők egymásba. Ezek megépítéséhez 2 piros háromszög kell. 1 pont

Azaz összesen $4+9+6+6+3+6+2 = 36$ piros háromszög kell, 1 pont

azaz $4 \cdot 36 = 144$ elemből áll a készlet. 1 pont

Összesen: **10 pont**

2. megoldás. Számoljuk össze, hogy hányféle tetraédert lehet építeni! A háromszögek száma ennek négyszerese. 1 pont

Vegyük sorra, hogy hányféle színű lapból építhetjük a tetraédert:

Egyféle színű lapokból 4 különböző tetraédert építhetünk (pirosat, kéket, sárgát, zöldet). 1 pont

Kétféle színű lapból kétféle tetraédert építhetünk:

Egy színből 3 lap és egy másikból 1 lap: ilyenből $4 \cdot 3 = 12$ van. 1 pont

Mindkét színből 2-2 lap: ilyenből $\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ van. 1 pont

Ha háromféle színű lapból építjük a tetraédert, akkor egy szín kétszer fog szerepelni, ezt 4-féleképpen választhatjuk ki, mellé a másik két lapot $\binom{3}{2} = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3$-féleképpen. Azaz ilyen tetraéderből $4 \cdot 3 = 12$ különböző van. 2 pont

Végül négyféle színből 2-féle tetraédert építhetünk, amelyek forgatással nem vihetők egymásba. 1 pont

Azaz összesen $4+12+6+12+2 = 36$ különböző tetraédert építhetünk. 1 pont

Ezek megépítéséhez pedig $36 \cdot 4 = 144$ háromszögre van szükség. 1 pont

Megjegyzés. Az utolsó pont csak akkor jár, ha helyes a végeredmény.

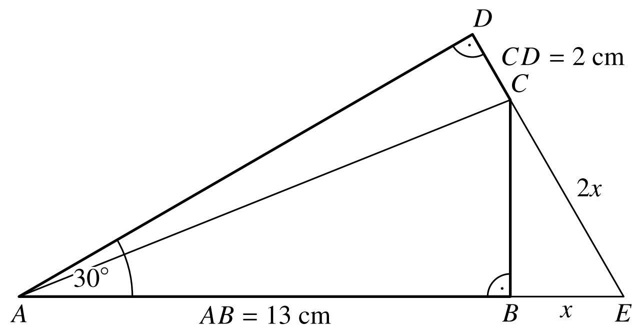
Összesen: **10 pont**

3. Az $ABCD$ négyszögben az A csúcsnál lévő belső szög 30°, a B, illetve D csúcsnál derékszög van, továbbá $AB = 13$ cm, és $CD = 2$ cm.

a) Határozzuk meg a hiányzó két oldal hosszának pontos értékét!

b) Igazoljuk, hogy a négyszög köré írt körének (a négyszög minden csúcsára illeszkedő kör) sugara centiméterben mérve egész szám! **10 pont**

Megoldás. Az adatoknak megfelelő ábra. 1 pont



Az AB és a DC szakaszok meghosszabbításának metszéspontja legyen az E pont. 1 pont

A BCE háromszög félszabályos, ezért ha $BE = x$, akkor $CE = 2x$, 1 pont

Az ADE háromszög is félszabályos, ezért $2 \cdot (2 + 2x) = 13 + x$, 1 pont

ebből $x = 3$ cm. 1 pont

Pitagorasz-tételt alkalmazva a BCE, illetve az ADE háromszögekben, $BC = \sqrt{27}$ cm, 1 pont

illetve $AD = \sqrt{192}$ cm adódik. 1 pont

A Thalesz-tétel megfordítása miatt, a B és a D pont is illeszkedik az AC átmérőjű körre. 1 pont

$AC = 14$ cm a Pitagorasz-tételből következően, 1 pont

így a négyszög köré írható kör sugara 7 cm, ami valóban egész szám. 1 pont

Összesen: **10 pont**