

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

2023/2024-es tanév

Haladók II. kategória 1. forduló

Feladatok

1. Négyzetszám-e az alábbi összeg értéke?

$$1! + 2! + 3! + \dots + 2023!$$

(Definíció szerint $1! = 1$, továbbá $n \geq 2$ pozitív egész esetén $n!$ az $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ szorzatot jelenti.) **7 pont**

2. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert az egész számok halmazán.

$$\left. \begin{array}{l} x^2 - y^2 - z^2 = 1 \\ y + z - x = -3 \end{array} \right\}$$

7 pont

3. Az ABC háromszögben a BC oldalhoz tartozó súlyvonal másfélszerese a BC oldalnak. Jelölje A_1 , B_1 és C_1 rendre a BC , AC és AB oldalak felezőpontjait. Bizonyítsuk be, hogy a háromszögben

$$AA_1^2 = BB_1^2 + CC_1^2.$$

7 pont

4. Egy konvex 2023-szögben behúztunk 20 átlót, amelyek páronként nem metszik egymást. Vágjuk szét a sokszöget az átlók mentén. Bizonyítsuk be, hogy a kapott sokszögek között van olyan, amelynek legalább 99 csúcsa van.

7 pont

5. Legyen $p(x)$ olyan másodfokú polinom, amelynek főegyütthatója 1. Tudjuk, hogy a $p(x)$, illetve a $p(p(x))$ polinomoknak van közös valós gyöke. Bizonyítsuk be, hogy

$$p(0) \cdot p(1) = 0.$$

7 pont