Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

2023/2024-es tanév

Haladók II. kategória 1. forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Négyzetszám-e az alábbi összeg értéke?

$$1!+2!+3!+\ldots+2023!$$

(Definíció szerint $1!=1$, továbbá $n\geq 2$ pozitív egész esetén $n!$ az $1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$ szorzatot jelenti.) **7 pont**

Megoldás. Az $1!+2!+3!+4!=1+2+6+24=33$, azaz 3-ra végződik. 1 pont
Ha $n\geq 5$, akkor az $n!$ osztható 10-zel (mivel $n!$ tartalmaz 5-tel és 2-vel osztható tényezőt is), azaz 0-ra végződik. 2 pont
Mindezek alapján az $1!+2!+3!+\ldots+2023!$ összeg utolsó számjegye $3+0=3$ lesz. 1 pont
Egy négyzetszám nem végződhet 3-ra (ahogy 2-re, 7-re vagy 8-ra sem). 2 pont
Tehát az $1!+2!+3!+\ldots+2023!$ összeg nem négyzetszám. 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert az egész számok halmazán.

$$\left.\begin{aligned} x^2-y^2-z^2&=1\\ y+z-x&=-3 \end{aligned}\right\}$$

7 pont

1. megoldás. A második egyenletből x-et kifejezve $x=y+z+3$, és behelyettesítve az első egyenletbe azt kapjuk, hogy $(3+z+y)^2-y^2-z^2=1$, majd innen az egyenletet rendezve adódik $2zy+6y+6z+9=1$. 2 pont
Miután az egyenlet mindkét oldalához 9-et adunk és kiemelésekkel szorzattá alakítunk, azt kapjuk, hogy $2(z+3)(y+3)=10\Rightarrow(z+3)(y+3)=5$. 2 pont
Az 5 lehetséges osztópárjai: $5=5\cdot 1=1\cdot 5=(-1)\cdot(-5)=(-5)\cdot(-1)$, emiatt ez a 4 lehetséges számpár adja meg $(z+3)$ és $(y+3)$ lehetséges értékeit. 1 pont
Innen rendre hármat-hármat kivonva az osztópárokból, illetve az $x=y+z+3$ műveletet elvégezve adódik a négy megoldás (számhármasként felírva):

$$(x;y;z)=(-9;-8;-4),(-9;-4;-8),(3;2;-2),(3;-2;2).$$ 2 pont

Összesen: **7 pont**

2. megoldás. Az első megoldáshoz hasonlóan dolgozunk, és mivel az egyenletrendszerben y és z szerepe szimmetrikus, mindegy, melyiket fejezzük ki.

A második egyenletből y-t kifejezve $y = x - z - 3$; ezt behelyettesítve az első egyenletbe kapjuk, hogy $x^2 - (x-z-3)^2 - z^2 = 1$, innen az egyenletet rendezve adódik $-2z^2 + 2xz + 6x - 6z - 9 = 1$. 2 pont

Miután az egyenlet mindkét oldalához 9-et adunk és kiemelésekkel szorzattá alakítunk, azt kapjuk, hogy $2(z+3)(x-z) = 10 \Rightarrow (z+3)(x-z) = 5$. 2 pont

Az 5 lehetséges osztópárjai: $5 = 5 \cdot 1 = 1 \cdot 5 = (-1) \cdot (-5) = (-5) \cdot (-1)$, emiatt ez a 4 lehetséges számpár adja meg $(z+3)$ és $(x-z)$ lehetséges értékeit. 1 pont

Innen rendre 3-at kivonva az osztópárok első számából adódik z, ezt felhasználva az osztópárok második tényezőjéből megkapjuk x-et, és végül az $y = x - z - 3$ helyettesítéssel adódik a négy megoldás (számhármasként felírva, mint az előző megoldásnál):

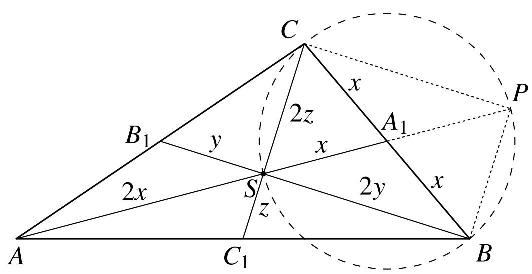
$$(x;y;z) = (-9;-8;-4), (-9;-4;-8), (3;2;-2), (3;-2;2).$$ 2 pont

Összesen: **7 pont**

3. Az ABC háromszögben a BC oldalhoz tartozó súlyvonal másfélszerese a BC oldalnak. Jelölje A_1, B_1 és C_1 rendre a BC, AC és AB oldalak felezőpontjait. Bizonyítsuk be, hogy a háromszögben

$$AA_1^2 = BB_1^2 + CC_1^2.$$ **7 pont**

Megoldás. Használjuk az ábrát.



Az ABC háromszög súlypontja legyen S, az S pont a súlyvonalnak a csúcstól távolabbi harmadolópontja. Legyen $A_1S = x$, $B_1S = y$ és $C_1S = z$, ekkor $BS = 2y$, $CS = 2z$, $BB_1 = 3y$ és $CC_1 = 3z$. Továbbá $AA_1 = 3x$, és a feladat feltétele miatt $BC = 2x$. 2 pont

A_1 a BC oldal felezőpontja, ezért $BA_1 = CA_1 = x = A_1S$, így a B, a C és az S pont egyenlő távol van az A_1 ponttól, azaz S rajta van a BC szakasz Thalész-körén. Ezért a BCS háromszög derékszögű, befogói $BS = 2y$, $CS = 2z$, átfogója pedig $BC = 2x$. 3 pont

Pitagorasz tétele alapján ekkor $(2y)^2 + (2z)^2 = (2x)^2$. 1 pont

Ha mindkét oldalt osztjuk 4-gyel, majd szorozzuk 9-cel, akkor a $(3y)^2 + (3z)^2 = (3x)^2$, azaz a $BB_1^2 + CC_1^2 = AA_1^2$ összefüggést kapjuk, és éppen ezt kellett belátni. 1 pont

Összesen: **7 pont**

Megjegyzés. A fenti ábrát használva (a pontok és a szakaszok bevezetését és leírását követően) a feladat indokolható az alábbi módon is.

Az S pontnak az A_1 pontra való tükörképe legyen P. Ekkor, mivel A_1 a BC oldal felezőpontja az $SBPC$ négyszög középpontosan szimmetrikus, ezért paralelogramma.

A paralelogramma átlói $BC = 2x$ és $SP = 2x$ (így az téglalap is), az oldalai pedig $BS = PC = 2y$ és $CS = AP = 2z$. A paralelogramma-tétel alapján a paralelogramma oldalainak négyzetösszege egyenlő az átlók négyzetösszegével, ezért $2 \cdot (2y)^2 + 2 \cdot (2z)^2 = (2x)^2 + (2x)^2$.

Ha mindkét oldalt osztjuk 8-cal, majd szorozzuk 9-cel, akkor a $(3y)^2 + (3z)^2 = (3x)^2$, azaz a $BB_1^2 + CC_1^2 = AA_1^2$ összefüggést kapjuk, és éppen ezt kellett belátni.

4. Egy konvex 2023-szögben behúztunk 20 átlót, amelyek páronként nem metszik egymást. Vágjuk szét a sokszöget az átlók mentén. Bizonyítsuk be, hogy a kapott sokszögek között van olyan, amelynek legalább 99 csúcsa van. **7 pont**

Megoldás. Mivel az átlók nem metszik egymást, minden vágással egy új sokszög keletkezik, tehát a kisebb sokszögek száma 21 lesz. 1 pont

Számoljuk meg ezen kisebb sokszögek oldalait!

Mivel az eredeti sokszög oldalaiba nem vághattunk bele, a 2023 eredeti oldal pontosan egy-egy kis sokszögnek az oldala. 1 pont

Mivel az átlókba sem vághattunk bele, minden vágás mentén 2 kis sokszög keletkezett. A 20 vágás $20 \cdot 2 = 40$ további oldalt jelent. 1 pont

Ez összesen 2063 oldal. 1 pont

A skatulyaelv miatt így lesz olyan kis sokszög, amely oldalainak és így csúcsainak a száma is legalább $\frac{2063}{21}$ felső egész része, azaz 99. Ezzel az állításunkat igazoltuk. 3 pont

Összesen: **7 pont**

Megjegyzés. Az utolsó 3 pont a következőképpen is indokolható:

Indirekt módon tegyük fel, hogy minden kis sokszögnek legfeljebb 98 csúcsa, illetve oldala van. Ekkor az oldalak száma legfeljebb $21 \cdot 98 = 2058$ lenne, ami ellentmond annak a ténynek, hogy 2063 darab oldal van. Azaz az állításunkat igazoltuk.

5. Legyen $p(x)$ olyan másodfokú polinom, amelynek főegyütthatója 1. Tudjuk, hogy a $p(x)$, illetve a $p\big(p\big(p(x)\big)\big)$ polinomoknak van közös valós gyöke. Bizonyítsuk be, hogy

$$p(0) \cdot p(1) = 0.$$ **7 pont**

Megoldás. Legyen $p(x)$ szokásos (kanonikus) alakja: $p(x) = x^2 + ax + b$, továbbá legyen a $p(x)$ és a $p\big(p\big(p(x)\big)\big)$ polinomok közös valós gyöke r. 1 pont

Ekkor felhasználva, hogy $p(r) = 0$ és $p(0) = b$, továbbá az $x = r$ értéket behelyettesítve a $p\big(p\big(p(x)\big)\big)$ polinomba: $p\big(p\big(p(r)\big)\big) = 0$, innen $p\big(p(0)\big) = 0$, majd $p(b) = 0$, 2 pont

azaz $p(b) = b^2 + ab + b = 0$, és innen (szorzattá alakítva) $b(b + a + 1) = 0$ adódik. 2 pont

Mivel $p(1) = 1^2 + a \cdot 1 + b = b + a + 1$ (és $p(0) = b$, amint azt már korábban láttuk), 1 pont

$b(b + a + 1) = 0$ miatt $p(0) \cdot p(1) = 0$. Ezzel az állítást igazoltuk. 1 pont

Összesen: **7 pont**