Bolyai János
Matematikai Társulat

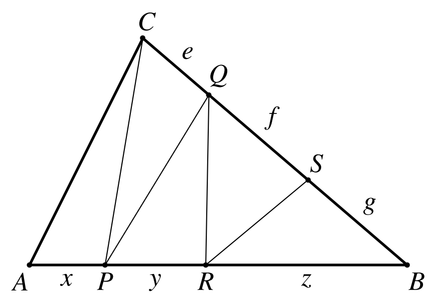
Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

2023/2024-es tanév

Haladók II. kategória 2. forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Az ABC háromszöget az ábra szerint feldaraboljuk öt egyenlő területű háromszögre. A keletkezett öt kis háromszög azon oldalainak hossza, amelyek az ABC háromszög oldalaira esnek, egész számok. Legalább mekkora az ABC háromszög kerülete?



7 pont

Megoldás. A feladat ábráját kiegészítettük további jelölésekkel – használjuk ezeket.

A háromszög megfelelő oldalait a, b, c-vel jelölve a kis háromszögek területének egyenlősége miatt, és mivel a CAP és CAB háromszögek AP-hez, illetve AB-hez tartozó magassága megegyezik, ezért $x = c/5$. 1 pont

Hasonlóan a CPQ és a CPB háromszögekből $e = a/4$.

A QPR és a QPB háromszögekből $y = \dfrac{4c}{15}$, így $z = \dfrac{8c}{15}$, és végül a QRB és az SRB háromszögekből $f = g = \dfrac{3a}{8}$. 2 pont

Mivel minden, betűvel jelölt hosszúság egész szám, ezért c-nek 15-tel, a-nak 8-cal oszthatónak kell lennie. 1 pont

Ha $c = 15$ és $a = 8$, akkor $b \geq 8$ (a háromszög-egyenlőtlenség miatt). $b = 8$ esetén $k = 31$. 1 pont

Ez a minimum, mert

– ha $c > 15$, akkor $c \geq 30$ és így $k > 31$, 1 pont

– ha pedig $a > 8$, akkor $a \geq 2 \cdot 8$ és így $k > 15 + 16 = 31$. 1 pont

Azaz a kerület minimuma 31, és ekkor a megfelelő (kis háromszög) oldalak hossza: $x = 3$, $y = 4$, $z = 8$, $e = 2$, $f = g = 3$ és $b = 8$ valóban egészek.

Összesen: **7 pont**

2. Egy matematika szakkörre hatan járnak. Karácsony előtt elhatározzák, hogy megajándékozzák egymást oly módon, hogy mindegyikük nevét felírják egy cédulára, a neveket egy dobozba teszik, majd sorban kihúznak egy-egy nevet. Ha valaki a saját nevét húzza, akkor a sorsolást megismétlik. Végül mind a hatan kihúznak egy nevet, és senki nem a sajátját. Az ajándékozást úgy bonyolítják le, hogy először egyikük odaadja az ajándékát annak, akit húzott, ezután az, aki kapta, szintén odaadja az ajándékát annak, akit húzott, és így tovább. Ekkor két eset lehetséges:

(1) Az ajándékozást kezdő diák lesz a hatodik, aki megkapja a neki szánt ajándékot, ekkor az ajándékozási lánc végigér, mindenki átadta az ajándékát.

(2) Amikor az ajándékozást kezdő diák megkapja az ajándékot, akkor lesz olyan, aki még nem adott és nem is kapott ajándékot. Ezért az ajándékozás folyamatát valaki, aki még nem adott át ajándékot, újra kezdi.

Az (1) vagy a (2) esemény bekövetkezésének nagyobb az esélye? **7 pont**

1. megoldás. Legyenek a szakkörösök A, B, C, D, E és F. Az (1) eseményt modellezhetjük úgy, hogy a hat tanulót egy kerek asztal köré ültetjük, és mindenki a tőle jobbra ülőt ajándékozza meg. Tehát az (1) esemény annyiféleképpen valósulhat meg, ahányféle sorrendben a hat ember leülhet egy kerek asztal köré, ezeknek a sorrendeknek a száma pedig $5! = 120$. 2 pont

A (2) esemény többféleképpen megvalósulhat:

– (2a) Lehet, hogy kétszer is újraindul az ajándékozás, ez úgy lehet, hogy háromszor két lépésben lesz vége.

Ekkor a hat diák három párba osztható, úgy, hogy az egy párban lévők egymást húzták. Ez annyiféleképpen lehetséges, ahányféleképpen a hat diákot három párba lehet sorolni. Nézzük azokat az eseteket, amikor A diák B-vel van párban. Ezek: AB, CD, EF vagy AB, CE, DF vagy AB, CF, ED. Ez eddig három lehetőség. Az A diák C-vel, D-vel, E-vel, F-fel is lehet egy párban, ezért az összes lehetséges párosítások száma $5 \cdot 3 = 15$. 1 pont

Ha az ajándékozás egyszer indul újra, akkor ez két háromlépéses (2b) vagy egy négylépéses és egy kétlépéses (2c) szakaszból áll.

– (2b) Ha kétszer három lépésben valósul meg, akkor a hat diák két hármas csoportra osztható, ez tízféleképpen lehetséges. (Hatból hármat húszféleképpen választhatunk ki, de ABC kiválasztása és DEF kiválasztása ugyanazt a két csoportot eredményezi.)

Egy csoporton belül kétféleképpen alakulhat az ajándékozási lánc, ezért a (2b) esemény $10 \cdot 2 \cdot 2 =$ $= 40$-féleképpen valósulhat meg. 2 pont

– (2c) Most a hat diák egy négyes és egy kettes csoportra van osztva, ez 15-féleképpen lehetséges. A kétfős csoportban lévő két diák egyértelmű, hogy egymást húzta, a négyfős csoportban pedig $3! = 6$-féleképpen alakulhat az ajándékozási lánc. Így a (2c) lehetőség $15 \cdot 6 = 90$-féleképpen valósulhat meg. 1 pont

Tehát a (2) esemény összesen $15 + 40 + 90 = 145$-féleképpen következhet be, így ennek nagyobb a valószínűsége. 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. megoldás. Legyenek a szakkörösök A, B, C, D, E és F. Az (1) eseményt modellezhetjük úgy, hogy a hat tanulót egy kerek asztal köré ültetjük, és mindenki a tőle jobbra ülőt ajándékozza meg. Tehát a (1) esemény annyiféleképpen valósulhat meg, ahányféle sorrendben a hat ember leülhet egy kerek asztal köré, ezeknek a sorrendeknek a száma pedig $5! = 120$. 2 pont

A „jó” sorsolások száma, azaz amelyeknél senki nem húzza a saját nevét, szitaformulával közvetlenül kiszámítható:

Jelölje A_i $(i = 1,2,3,4,5,6)$ azt a halmazt, amelybe azon esetek tartoznak, amikor az i-edik diák önmagát húzza. A szitaformula alapján

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6| = \binom{6}{1} \cdot 5! - \binom{6}{2} \cdot 4! + \binom{6}{3} \cdot 3! - \binom{6}{4} \cdot 2! + \binom{6}{5} \cdot 1! - 1 = 455.$$

Figyelembe véve, hogy a lehetséges sorsolások száma $6!$, így a „jó” sorsolások száma, azaz amelyeknél senki sem húzza a saját nevét $\left|\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6}\right| = 720 - 455 = 265$. 4 pont

Ebből a 265 esetből 120 az (1) esemény bekövetkezését jelenti, $265 - 120 = 145$ pedig a (2) eseményét, így ez utóbbinak nagyobb az esélye. 1 pont

Összesen: **7 pont**

3. Mely valós a számok esetén van három különböző valós gyöke az $x^3 + a(1-a)x - a^2 = 0$ egyenletnek? **7 pont**

Megoldás. Az egyenlet bal oldalát szorzattá alakítjuk.

$$x^3 + a(1-a)x - a^2 = x(x^2 - a^2) + a(x - a) = (x-a)\,(x(x+a)+a) = (x-a)(x^2 + ax + a)$$ 2 pont

Azaz az egyenletnek $x = a$ gyöke. 1 pont

Vizsgáljuk az $(x^2 + ax + a)$ tényezőt! A megfelelő $x^2 + ax + a = 0$ egyenlet megoldásait kiszámolva: $x_{1;2} = \dfrac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4a}}{2}$. 1 pont

Mivel három különböző valós gyöke van az eredeti egyenletnek, ezért az $x^2 + ax + a = 0$ egyenlet diszkriminánsa pozitív, azaz $a^2 - 4a > 0$, és innen adódik, hogy $a < 0$ vagy $a > 4$. 1 pont

Másfelől a három különböző valós gyökhöz kell még az is, hogy a másodfokú egyenlet gyökei is különbözzenek a-tól (és egymástól is). Ekkor $\dfrac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4a}}{2} \neq a$, és innen $\pm\sqrt{a^2 - 4a} \neq 3a$, majd $a^2 - 4a \neq 9a^2$, és végül $0 \neq 4a(2a+1)$, azaz $a \neq 0$, és $a \neq -\dfrac{1}{2}$ adódik. 1 pont

Az eredményeket összefoglalva pontosan $a \in \mathbb{R} \setminus [0;4] \setminus \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$ esetén van három különböző valós gyöke az egyenletnek. 1 pont

Összesen: **7 pont**

4. Legyen $k \geq 3$ tetszőleges páratlan szám. Igazoljuk, hogy végtelen sokféleképpen jelölhető ki k darab egymást követő pozitív egész szám oly módon, hogy ezek köbeinek összege osztható legyen 2024-gyel. **7 pont**

Megoldás. Jelöljük a k darab szám közül a középsőt n-nel, ekkor szomszédai $n-1$ és $n+1$. Ezek köbeinek összege $(n-1)^3+n^3+(n+1)^3$. A két szélső tag összegét az ismert $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$ azonosság alapján szorzattá alakíthatjuk úgy, hogy az egyik tényező $2n$. Emiatt a három tag összegéből n kiemelhető.

Részletesen:

$$(n-1)^3+n^3+(n+1)^3 = n^3+(n-1+n+1)((n-1)^2-(n-1)(n+1)+(n+1)^2) =$$
$$= n\left(n^2+2(n^2+3)\right)$$ 3 pont

Ezután további párokat képzünk, az $(n-2)^3+(n+2)^3$, a $(n-3)^3+(n+3)^3$, …, és általában az $(n-m)^3+(n+m)^3$ összegekből is kiemelhető $2n$.

Részletesen:

$$(n-m)^3+(n+m)^3 = 2n\left((n-m)^2-(n-m)(n+m)+(n+m)^2\right) = 2n(n^2+3m^2).$$ 1 pont

Azaz a teljes összegből kiemelhető n. A kiemelésnél a másik tényező egész szám lesz, mivel az egyes szorzattá alakításoknál kapott második tényezők egész számok. Tehát az eredeti összeg osztható n-nel. 2 pont

Így ha n-et úgy választjuk meg, hogy osztható legyen 2024-gyel, akkor a teljes köbösszeg is osztható 2024-gyel. Nyilván végtelen sok ilyen (2024-gyel osztható) szám jelölhető ki. Ezzel az állításunkat igazoltuk. 1 pont

Összesen: **7 pont**