

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

2023/2024-es tanév

Haladók III. kategória 1. forduló

Feladatok

1. Egy kör kerületén kijelölünk n pontot. Azt szeretnénk elérni, hogy a pontok által meghatározott háromszögek közül pontosan 2^{2024} legyen derékszögű. Mennyi a szükséges pontok számának minimuma? **7 pont**
2. Legyen n pozitív egész szám, d pedig az $n^2 + 1$ és az $(n + 1)^2 + 1$ számok legnagyobb közös osztója. Határozzuk meg d lehetséges értékeit. **7 pont**
3. Legyen F az $ABCD$ húrnégyszög körülírt körének azon pontja, amely felezi a kör C és D pontokat nem tartalmazó AB ívét. A DF és AC egyenesek a P , a CF és BD egyenesek pedig a Q pontban metszik egymást. Bizonyítsuk be, hogy a PQ és AB egyenesek párhuzamosak. **7 pont**
4. Határozzuk meg az $xy + yz + zx$ kifejezés értékét, ha az x, y, z valós számok teljesítik az
$$x^2 - yz = y^2 - zx = z^2 - xy = 2$$
feltételt. **7 pont**
5. Adott egy H halmaz, amelynek elemszáma 50, és mindegyik eleme egész szám. Bizonyítsuk be, hogy H -nak van olyan nem üres részhalmaza, amelyben az elemek összege 100-zal osztva 0 vagy 1 vagy 99 maradékot ad. **7 pont**