Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

2023/2024-es tanév

Haladók III. kategória 1. forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Egy kör kerületén kijelölünk n pontot. Azt szeretnénk elérni, hogy a pontok által meghatározott háromszögek közül pontosan 2^{2024} legyen derékszögű. Mennyi a szükséges pontok számának minimuma? **7 pont**

Megoldás. Derékszögű háromszög pontosan oly módon keletkezik, ha a három csúcs közül kettő átellenesen helyezkedik el a kör kerületén. Ilyenkor harmadik csúcsnak a többi $n-2$ közül bármelyik választható. Emiatt, ha k darab átmérő alakul ki, akkor a derékszögű háromszögek száma $(n-2)k = 2^{2024}$. 1 pont

Ezért $n-2$ és k is 2-nek természetes kitevős hatványa, azaz $n-2 = 2^a$ és $k = 2^b$, 1 pont

valamint $n \geq 2k$, hiszen a k darab átmérőben lévő csúcsok száma legfeljebb a pontok száma, azaz n lehet. 1 pont

$(n-2)k = 2^{2024} = 2^a \cdot 2^b$, tehát $a+b = 2024$ és $n \geq 2k$ miatt $a \geq b$. 1 pont

$a = b$ csak $n = k+2$ esetén lehetséges, de ekkor $n \geq 2k$ miatt $k = 1, n = 3$ vagy $k = 2, n = 4$ lenne, de ekkor $a+b = 2024$ nem teljesül, tehát $a > b$. 1 pont

Mivel a lehető legkisebb n-t keressük, ezért $a = 1013$ és $b = 1011$, így $k = 2^{1011}$, $n-2 = 2^{1013}$. 1 pont

Ekkor a pontok száma $n = 2^{1013} + 2$, és $k = 2^{1011}$ darab átmérő végpontjai egymással átellenesen helyezkednek el, a többi pont pedig úgy, hogy semelyik ne legyen semelyik másik ponttal szemben. 1 pont

Válasz: a szükséges pontok számának a minimuma tehát $n = 2^{1013} + 2$.

Összesen: **7 pont**

2. Legyen n pozitív egész szám, d pedig az n^2+1 és az $(n+1)^2+1$ számok legnagyobb közös osztója. Határozzuk meg d lehetséges értékeit. **7 pont**

1. megoldás. $n=1$ esetén $(n^2+1;(n+1)^2+1)=(2;5)=1$,

$n=2$ esetén $(n^2+1;(n+1)^2+1)=(5;10)=5$. 1 pont

Legyen $(n^2+1;(n+1)^2+1)=d$. Ekkor a $d \mid (n+1)^2+1$ és $d \mid n^2+1$ oszthatóságok miatt a különbségükre is igaz, hogy $d \mid (n+1)^2+1-(n^2+1)=2n+1$. 1 pont

Továbbá $d \mid n^2+1$ következtében $d \mid 4n^2+4$, 1 pont

és $d \mid 2n+1$ miatt $d \mid (2n+1)(2n-1)=4n^2-1$, 2 pont

így $d \mid (4n^2+4)-(4n^2-1)=5$ is igaz. 1 pont

Így d értéke csak 1 vagy 5 lehet, és amint azt korábban láttuk, mindkettő meg is valósulhat. 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. megoldás. (Hasonló az előzőhöz, csak most az euklideszi algoritmussal dolgozunk.)

$$(n+1)^2+1=n^2+2n+2.$$

Legyen $(n^2+1;n^2+2n+2)=d$. A d-t most euklideszi-algoritmussal keressük meg:

$n^2+2n+2=(n^2+1)+(2n+1)$ miatt $d=(n^2+1;2n+1)$. 1 pont

Mivel $4 \nmid (2n+1)$, ezért $d=(4n^2+4;2n+1)$. 2 pont

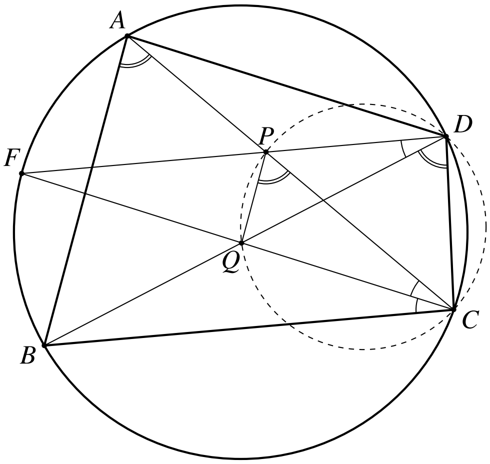
Továbbá $4n^2+4=(2n+1)(2n-1)+5$ miatt $d=(2n+1;5)$. 2 pont

Figyelembe véve, hogy az 5-nek két (pozitív) osztója van az 1 és az 5, így d csak 1 vagy 5 lehet. 1 pont

Ezeket az értékeket fel is veszi, pl. ha $n=1$, akkor $d=1$, ha pedig $n=2$, akkor $d=5$. 1 pont

Összesen: **7 pont**

3. Legyen F az $ABCD$ húrnégyszög körülírt körének azon pontja, amely felezi a kör C és D pontokat nem tartalmazó AB ívét. A DF és AC egyenesek a P, a CF és BD egyenesek pedig a Q pontban metszik egymást. Bizonyítsuk be, hogy a PQ és AB egyenesek párhuzamosak. **7 pont**



Megoldás. Használjuk az ábrát és jelöléseit!

Az AF és BF ívek hosszúságának egyenlősége miatt $BCF\sphericalangle = FCA\sphericalangle$. 1 pont

Figyelembe véve, hogy a $BCDF$ húrnégyszög körülírt körében az FB íven nyugvó kerületi szögek megegyeznek, ezért $BDF\sphericalangle = BCF\sphericalangle$. 1 pont

Ezt felhasználva

$$QCP\sphericalangle = FCA\sphericalangle = BCF\sphericalangle = BDF\sphericalangle = QDP\sphericalangle. \quad \text{1 pont}$$

Így a PQ szakasz a C és D pontokból azonos szög alatt látszik, és mivel C és D is a PQ egyenes azonos oldalán helyezkedik el, ezért a $CDPQ$ négyszög húrnégyszög. 1 pont

Az említett húrnégyszög körülírt körében $CPQ\sphericalangle = CDQ\sphericalangle$ (azonos íven nyugvó kerületi szögek). 1 pont

Másrészt az $ABCD$ húrnégyszög alapján $CDQ\sphericalangle = CDB\sphericalangle = CAB\sphericalangle$. 1 pont

Így $CPQ\sphericalangle = CAB\sphericalangle$, és mivel a szögek egyik szögszára azonos egyenesre esik, ezért a két szög egyállású, ami azt jelenti, hogy $PQ \parallel AB$. 1 pont

Összesen: **7 pont**

4. Határozzuk meg az $xy+yz+zx$ kifejezés értékét, ha az x, y, z valós számok teljesítik az

$$x^2-yz=y^2-zx=z^2-xy=2$$

feltételt. **7 pont**

Megoldás. Mivel $x^2-yz=y^2-zx$, így $x^2-y^2+xz-yz=0$, innen $(x-y)(x+y)+z(x-y)=0$, vagyis

$$(x-y)(x+y+z)=0 \qquad (1)$$ 1 pont

Hasonlóképpen

$$(y-z)(x+y+z)=0 \qquad (2)$$

és

$$(z-x)(x+y+z)=0 \qquad (3)$$ 1 pont

– Ha $x+y+z\neq 0$, akkor az (1)–(3) alapján $x=y=z$ adódik, ami a feladat eredeti feltétele szerint nem lehetséges. 1 pont

– Ha $x+y+z=0$, akkor pedig az $x^2-yz=2$, $y^2-zx=2$ és a $z^2-xy=2$ egyenlőségek összeadásával 1 pont

$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=6$, majd $(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)=6$, és innen

$$xy+yz+zx=\frac{(x+y+z)^2-6}{3}=\frac{-6}{3}=-2$$

adódik. 2 pont

Azaz $xy+yz+zx$ kifejezés értéke a feltételek esetén -2.

Léteznek a feladat eredeti feltételét teljesítő számhármasok, például egy ilyen lehetőség:

$$(x;y;z)=(\sqrt{2};0;-\sqrt{2})$$ 1 pont

Összesen: **7 pont**

5. Adott egy H halmaz, amelynek elemszáma 50, és mindegyik eleme egész szám. Bizonyítsuk be, hogy H-nak van olyan nem üres részhalmaza, amelyben az elemek összege 100-zal osztva 0 vagy 1 vagy 99 maradékot ad. **7 pont**

Megoldás. H elemeit jelöljük $a_1, a_2, \ldots, a_{50}$-nel. Képezzük az alábbi 50 darab összeget: $s_1=a_1$, $s_2=a_1+a_2$, $s_3=a_1+a_2+a_3$, $\ldots$, $s_{50}=a_1+a_2+\ldots+a_{50}$. Ha valamelyik összeg a kívánt maradékok valamelyikét adja, akkor készen vagyunk. 2 pont

Ha nem, akkor az ötven összeg 97-féle maradékot adhat 100-zal osztva. 1 pont

Ha vannak egyező maradékok, akkor a több tagot tartalmazó összegből kivonva a kevesebbet tartalmazót, egy olyan összeg adódik, amely nulla maradékot ad. 1 pont

Ha nincsenek egyező maradékok, akkor mivel 50 különböző maradékunk van, és 97-féle maradék $(2, 3, 4, \ldots, 98)$ lehet, ezért előfordulnak szomszédos maradékok. 2 pont

Ekkor a több tagú összegből a kevesebb tagút kivonva, olyan összeget kapunk, ami 1 vagy 99 maradékot ad. Ezzel készen vagyunk. 1 pont

Összesen: **7 pont**