

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

2023/2024-es tanév

Kezdők I. kategória 3. (döntő) forduló

Feladatok

1. Egy görög szigeten csak alfák, béták és gammák élnek. Az alfák mindig igazat mondanak, a béták mindig hazudnak, a gammák felváltva mondanak igazat és hazugságot (nem összevissza, hanem egymástól függetlenül, de hazugság után biztosan igazság jön, igazság után pedig hazugság). Találkozunk egy csoport szigetlakóval, akik ismerik egymást, és mindenkitől megkérdezzük a következő 4 kérdést:

- Van köztetek alfa?
- Te alfa vagy?
- Van köztetek béta?
- Hazudtál már valaha?

Az első kérdésre 31-en, a másodikra 20-an, a harmadikra 13-an válaszoltak igennel.

Hányan válaszoltak igennel az utolsó kérdésre?

10 pont

2. Az $ABCD$ trapéz alapjai az AB és CD oldalak, az AC átló felezőpontja F . Bizonyítsuk be, hogy ha az ABF és az ACD háromszögek területe egyenlő, akkor a $BCDF$ négyszög is trapéz.

10 pont

3. Egy táblára felírjuk az $1, 2, 3, \dots, 15$ számokat. Ezután minden lépésben kiválasztunk a számok közül két olyat, amelyek közül az egyik osztója a másiknak. A számokat töröljük, és felírjuk helyettük az egész hányadosukat. Az eljárást addig folytatjuk, amíg a táblán már egyetlen olyan szám sem marad, amelyik osztója lenne egy másiknak.

Legkevesebb hány szám maradhat a táblán?

10 pont