

## Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

2024/2025-ös tanév

### Haladók II. kategória 1. forduló

#### Feladatok

1. Az  $ABCD$  téglalapban  $AB : BC = 4 : 3$ . Legyen  $F$  az  $AB$ ,  $G$  a  $CD$  oldal felezőpontja, míg  $K$  az  $AC$  átló felezőpontja. Az  $AF$  és  $FB$ , valamint a  $CG$  és  $GD$  szakaszok fölé a téglalap belsejébe azonos sugarú félköröket rajzolunk. A  $K$  középpontú  $k$  kör pedig kívülről érinti az előző félköröket. Mekkora a  $k$  kör sugara és félkörök sugara arányának pontos értéke? **7 pont**
2. Adjuk meg az  $|y| = \sqrt{x^2 + x - 2}$  egyenlet megoldásait, ha  $x$  és  $y$  egész számok. **7 pont**
3. Adott öt különböző pozitív egész szám. Ha az összes lehetséges módon képezzük kettőnek az összegét, akkor pontosan hét különböző értéket kapunk. Igazoljuk, hogy az öt szám összege 5-tel osztható. **7 pont**
4. Mely egész  $(a; b)$  számpárok esetén teljesül az alábbi egyenlet?  
$$(a - 3)b^2 + (2a - 6)b = 3a - 4$$
 **7 pont**
5. 10 osztálytárs színházba megy, ahol ugyanabban a sorban, egymás melletti székeken kapnak helyet. A szünetről visszatérve ugyanazokat az üléseket foglalják el, de nem biztos, hogy mindenki a saját helyére ül vissza. Aki máshová ül, az eredeti helye melletti ülésre kerül. Tegyük fel, hogy  $n$  diák kerül új helyre, ahol  $n$  10-nél nem nagyobb természetes szám. Adjuk meg  $n$  függvényében a lehetséges ülésrendek számát! **7 pont**