Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

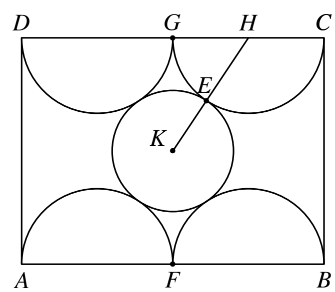
2024/2025-ös tanév

Haladók II. kategória 1. forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Az $ABCD$ téglalapban $AB : BC = 4 : 3$. Legyen F az AB, G a CD oldal felezőpontja, míg K az AC átló felezőpontja. Az AF és FB, valamint a CG és GD szakaszok fölé a téglalap belsejébe azonos sugarú félköröket rajzolunk. A K középpontú k kör pedig kívülről érinti az előző félköröket. Mekkora a k kör sugara és félkörök sugara arányának pontos értéke? **7 pont**

Megoldás. Készítsünk vázlatrajzot. 1 pont



Jelölje r a félkörök sugarát, ekkor $AB = 4r$ és $BC = 3r$.

Érintkező körök érintési pontja rajta van a körök középpontjait összekötő centrálison, tehát K, E és H pontok egy egyenesen vannak. 1 pont

Jelölje a k kör sugarát $KE = R$. A GKH derékszögű háromszögre felírva a Pitagorasz-tételt (a két befogó $KG = \frac{3}{2}r$ és $GH = r$, míg az átfogó $KH = R + r$): 1 pont

$$(R+r)^2 - r^2 = \left(\frac{3}{2}r\right)^2. \qquad \text{1 pont}$$

$$R^2 + 2Rr + r^2 - r^2 = \frac{9}{4}r^2, \qquad \text{és innen} \qquad 4R^2 + 8Rr - 9r^2 = 0. \qquad \text{1 pont}$$

$$R = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 16 \cdot 9}}{8} r = \frac{-2 \pm \sqrt{13}}{2} r. \qquad \text{1 pont}$$

Mivel R és r pozitív számok, így az $\frac{R}{r}$ arány is pozitív lesz, ezért $\frac{R}{r} = \frac{\sqrt{13} - 2}{2}$. 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. Adjuk meg az $|y| = \sqrt{x^2+x-2}$ egyenlet megoldásait, ha x és y egész számok. **7 pont**

1. megoldás. Mivel $x^2+x-2=(x-1)(x+2)\geq 0$ teljesülése szükséges, ezért csak $x\geq 1$ vagy $x\leq -2$ értékek jöhetnek szóba. 1 pont

Ebből $x=1$ és $x=-2$ esetén is $y=0$ adódik, tehát a $(-2;0)$ és az $(1;0)$ megoldások. 1 pont

Ha $x>2$, akkor $x^2<x^2+x-2<x^2+2x+1=(x+1)^2$, vagyis a gyök alatti kifejezés két szomszédos négyzetszám közé esik, így $\sqrt{x^2+x-2}$ nem lehet egész, ilyen megoldás tehát nincs. 2 pont

$x=2$ esetén $|y|=2$ adódik, vagyis a $(2;-2)$ és a $(2;2)$ is megoldások. 1 pont

Ha $x<-3$, akkor pedig $x+1<-2$ felhasználásával $x^2>x^2+x-2>x^2+x+x+1=(x+1)^2$, vagyis $\sqrt{x^2+x-2}$, ebben az esetben sem lehet egész, tehát ilyen megoldás sincs. 1 pont

$x=-3$ esetén pedig szintén $|y|=2$ adódik, vagyis a $(-3;-2)$ és a $(-3;2)$ is megoldások. 1 pont

Tehát hat megoldás van, és ezek: $(-2;0)$, $(1;0)$, $(2;-2)$, $(2;2)$, $(-3;-2)$ és $(-3;2)$.

Összesen: **7 pont**

Megjegyzés. Az $x>2$ és $x<-3$ esetek bármelyikének teljes körű vizsgálatáért 2 pont, mindkettőért összesen 3 pont jár.

2. megoldás. Mivel $x^2+x-2=(x-1)(x+2)\geq 0$ teljesülése szükséges, ezért csak $x\geq 1$ vagy $x\leq -2$ értékek jöhetnek szóba. 1 pont

Legyen $|y|=k\geq 0$. Ekkor $\sqrt{x^2+x-2}=k$, ahonnan négyzetre emelés után $x^2+x-2=k^2$ adódik.

Végigszorozva 4-gyel, átrendezve, majd teljes négyzetté alakítva kapjuk, hogy

$$(2x+1)^2-(2k)^2=9,$$ 1 pont

majd azt, hogy

$$(2x+1-2k)(2x+1+2k)=9.$$ 1 pont

Felhasználva egyfelől, hogy $2x+1-2k$ és $2x+1+2k$ egész számok és így a 9 osztói, illetve hogy ($k\geq 0$ miatt) $2x+1-2k\leq 2x+1+2k$, 1 pont

másfelől pedig, hogy 9 a következőképpen bontható egészek szorzatára:

$$9=1\cdot 9=3\cdot 3=(-3)\cdot(-3)=(-9)\cdot(-1);$$

a következő négy eset lehetséges. 1 pont

I: $2x+1-2k=1$ és $2x+1+2k=9$; innen $x=2, k=2$, azaz $x=2$ és $y=\pm 2$ adódik,

II: $2x+1-2k=-9$ és $2x+1+2k=-1$; innen $x=-3, k=2$, azaz $x=-3$ és $y=\pm 2$ adódik, 1 pont

III: $2x+1-2k=3$ és $2x+1+2k=3$; innen $x=1, k=0$, azaz $x=1$ és $y=0$ adódik,

IV: $2x+1-2k=-3$ és $2x+1+2k=-3$; innen $x=-2, k=0$, azaz $x=-2$ és $y=0$ adódik. 1 pont

Tehát hat megoldás van, és ezek: $(-2;0)$, $(1;0)$, $(2;-2)$, $(2;2)$, $(-3;-2)$ és $(-3;2)$.

Összesen: **7 pont**

3. Adott öt különböző pozitív egész szám. Ha az összes lehetséges módon képezzük kettőnek az összegét, akkor pontosan hét különböző értéket kapunk. Igazoljuk, hogy az öt szám összege 5-tel osztható. **7 pont**

Megoldás. Legyen az 5 különböző szám $a < b < c < d < e$. A tíz lehetséges összegből a következő hét biztosan különböző: $a+b < a+c < a+d < a+e < b+e < c+e < d+e$. 1 pont

A maradék három összegre $b+c < b+d < c+d$. Ezek mindhárman nagyobbak $a+c$-nél és kisebbek $c+e$-nél. 1 pont

Figyelembe véve, hogy pontosan hét különböző értékünk van az összegekre, ez csak úgy lehetséges, ha $a+d = b+c$, $a+e = b+d$ és $b+e = c+d$. 1 pont

Az első egyenletből $b = a+d-c$, ezt beírva a harmadik egyenletbe $a+d-c+e = c+d$, amiből $a+e = 2c$, 1 pont

de akkor a második egyenlet alapján $b+d = 2c$ is fennáll. 1 pont

A két utolsó egyenlőséget összeadva $a+b+d+e = 4c$, amiből $a+b+c+d+e = 5c$ következik, 1 pont

és mivel c egész szám, ez éppen azt jelenti, hogy az $a+b+c+d+e$ összeg 5-tel osztható. 1 pont

A feladat feltételeinek megfelelő számok léteznek is, az 1, 2, 3, 4 és 5 számok például jók. A páronkénti összegek növekvő sorban: 3, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 8 és 9.

Összesen: **7 pont**

4. Mely egész $(a;b)$ számpárok esetén teljesül az alábbi egyenlet?

$$(a-3)b^2+(2a-6)b=3a-4$$ **7 pont**

1. megoldás. A bal oldal szorzattá alakítva: $(a-3)(b^2+2b)=3a-4$. 1 pont

$a\neq 3$, mert különben a bal oldal nulla, a jobb oldal pedig 5 lenne, így $(a-3)$-mal eloszthatjuk a két oldalt és kapjuk: $b^2+2b=\dfrac{3a-4}{a-3}$. 1 pont

A jobb oldalt átalakítva adódik: $b^2+2b=3+\dfrac{5}{a-3}$. 1 pont

A bal oldalon egész szám áll, ezért az $\dfrac{5}{a-3}$ tört értéke is egész, így $a-3$ osztója az 5-nek, ezért $a-3$ értéke csak -1, 1, -5 vagy 5, az a szám pedig csak 2, 4, -2 vagy 8 lehet. 2 pont

A lehetséges eseteket táblázatba foglalva:

a	2	4	-2	8
b^2+2b	-2	8	2	4
$(b+1)^2=b^2+2b+1$	-1	9	3	5
b	nem valós	2 vagy -4	nem egész	nem egész

Tehát a keresett számpárok: $a=4$ és $b=2$, illetve $a=4$ és $b=-4$. 2 pont

Összesen: **7 pont**

2. megoldás. $a\neq 3$, mert ekkor a bal oldal nulla, a jobb oldal pedig 5, azaz az

$$(a-3)b^2+(2a-6)b-3a+4=0$$

egyenletet (ami b-ben valódi másodfokú egyenlet) kell megoldanunk.

Mivel b egész szám, ahhoz, hogy ennek az egyenletnek legalább az egyik gyöke egész szám legyen, szükséges, hogy az egyenlet $D=16a^2-76a+84$ diszkriminánsa négyzetszám legyen. 1 pont

Keressünk a $16a^2-76a+84$ kifejezésre „hasonlító” négyzetszámokat!

Ha $a<0$, akkor

$$16a^2-76a+84=(4a-9)^2-4a+3>(4a-9)^2$$

és

$$16a^2-76a+84=(4a-10)^2+4a-16<(4a-10)^2,$$

azaz $a<0$ esetén a diszkrimináns értéke két szomszédos négyzetszám közé esik, így nem lehet négyzetszám. 2 pont

Ha $a>4$, akkor

$$16a^2-76a+84=(4a-9)^2-4a+3<(4a-9)^2$$

és

$$16a^2-76a+84=(4a-10)^2+4a-16>(4a-10)^2,$$

azaz $a>4$ esetén a diszkrimináns értéke szintén két szomszédos négyzetszám közé esik, így nem lehet négyzetszám. Tehát a értéke csak 0, 1, 2 vagy 4 lehet. 2 pont

Ha $a=0$, $a=1$ vagy $a=2$, akkor a diszkrimináns értéke rendre 84, 24, illetve -4, tehát nem négyzetszám.

$a=4$ esetén pedig a diszkrimináns 36, ekkor a másodfokú egyenlet megoldásai $b_1=2$ és $b_2=-4$.

Tehát a keresett számpárok: $a=4$ és $b=2$, illetve $a=4$ és $b=-4$. 2 pont

Összesen: **7 pont**

5. 10 osztálytárs színházba megy, ahol ugyanabban a sorban, egymás melletti székeken kapnak helyet. A szünetről visszatérve ugyanazokat az üléseket foglalják el, de nem biztos, hogy mindenki a saját helyére ül vissza. Aki máshová ül, az eredeti helye melletti ülésre kerül. Tegyük fel, hogy n diák kerül új helyre, ahol n 10-nél nem nagyobb természetes szám. Adjuk meg n függvényében a lehetséges ülésrendek számát! **7 pont**

Megoldás. A szünetről visszatérve csakis úgy változhat meg az ülésrend, hogy két-két egymás mellett ülő diák cserél helyet. 1 pont

Például vegyük balról az első olyan diákot, aki mozgott. Ő csak egy hellyel jobbra ülhet, és az ő helyét csak a jobb oldali szomszédja foglalhatta el. Ha van még helycsere, ugyanezt a gondolatmenetet alkalmazva a tőlük jobbra ülő diákokra, ugyanígy csak egymás melletti diákok cserélhetnek helyet. 1 pont

Mivel összesen páros számú diák van és a cserék is párokban történnek, nem lehetséges, hogy páratlan számú diák ül vissza az eredeti helyére. 1 pont

Ha $n = 2k$ diák ül vissza az eredeti helyére, akkor a helyben maradó diákokat egyesével, a helyet cserélőket pedig páronként egy-egy blokknak tekinthetjük. A lehetséges ülésrendek számát az határozza meg, hogy hányféleképpen helyezhetőek el a kettes blokkok. 1 pont

Azaz van $2k$ helyben maradó diák és $5-k$ pár, így $2k+5-k = 5+k$ blokkból kell kiválasztanunk $2k$ darab (vagy ami ezzel egyenértékű $5-k$ darab) blokkot. 2 pont

Tehát $\binom{5+k}{2k} = \binom{5+k}{5-k} = \binom{5+\frac{n}{2}}{n} = \binom{5+\frac{n}{2}}{5-\frac{n}{2}}$ lehetőség van. 1 pont

Összesen: **7 pont**

Megjegyzések. 1. Az utolsó pont a kulcsban felírt bármelyik alak helyes megadásáért jár.

Az utolsó 4 pontot akkor is kapja meg a versenyző, ha helyesen kiszámolja n minden lehetséges értékére a lehetőségek számát, de általános képletet nem ír fel. A lehetőségek $L(n)$ száma:

$L(1) = L(3) = L(5) = L(7) = L(9) = 0$ és $L(0) = L(10) = 1$, $L(2) = 15$, $L(4) = 35$, $L(6) = 28$, $L(8) = 9$.

Ha a versenyző egyesével számolja ki az értékeket, akkor az alábbiak szerint kapja a pontszámát:

- páratlan n-ek kizárása: 3 pont
- $n = 0$; 10; 8 mindegyikének helyes megadása: 1 pont
- $n = 2$; 4; 6 esetek helyes megadása egyenként: 1-1-1 pont

2. Megmutatható (és különböző szövegverziókkal közismert feladat), hogy a lehetőségek együttes száma $L(0)+L(1)+\ldots+L(10) = 89 = f_{11}$ a 11-edik Fibonacci-szám, és általában ha 10 helyett n diák van; a lehetőségek együttes száma $L(0)+L(1)+\ldots+L(n) = f_{n+1}$, azaz az $(n+1)$-edik Fibonacci-szám.