

2015. április 16. csütörtök

1. Feladat Legyen ABC_{Δ} hegyesszögű háromszög, melyben a C -ből induló magasságvonal talppontját D jelöli. Az ABC szög belső szögfelezője a CD egyenest E pontban metszi, míg az ADE_{Δ} háromszög ω -val jelölt körülírt körét E és F pontokban. Igazoljuk, hogy ha $ADF\angle = 45^{\circ}$, akkor a CF egyenes érinti az ω kört.

2. Feladat *Dominónak* hívjuk a 2×1 -es vagy 1×2 -es téglalapot. Határozzuk meg, hányféleképpen helyezhetünk el n^2 dominót átfedés nélkül a $2n \times 2n$ -es sakktáblán úgy, hogy minden 2×2 -es résztáblájában legalább 2 lefedetlen, azonos sorba vagy azonos oszlopba eső mezőt tartalmazzon!

3. Feladat Legyenek n és m 1-nél nagyobb egész számok, továbbá az a_1, a_2, \dots, a_m számok n^m -nél nem nagyobb pozitív egészek. Bizonyítsuk be, hogy léteznek olyan n -nél nem nagyobb b_1, b_2, \dots, b_m pozitív egészek, amelyek teljesítik az

$$(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_m + b_m) < n$$

egyenlőtlenséget. Az (x_1, x_2, \dots, x_m) kifejezés az x_1, x_2, \dots, x_m számok legnagyobb közös osztóját jelöli.