2012. július 10., kedd

1. Feladat Az ABC háromszög A csúccsal szemközti hozzáírt körének középpontja J. Ez a hozzáírt kör a BC oldalt az M pontban, az AB, ill. AC egyeneseket pedig a K, ill. L pontban érinti. Az LM és BJ egyenesek metszéspontja F, a KM és CJ egyenesek metszéspontja pedig G. Legyen S az AF és BC egyenesek metszéspontja, T pedig a AG és BC egyenesek metszéspontja.

Bizonyítsuk be, hogy M az ST szakasz felezőpontja.

(Az ABC háromszög A csúccsal szemközti *hozzáírt kör*e az a kör, amelyik érinti a BC szakaszt, továbbá az AB félegyenes B-n túli részét és az AC félegyenes C-n túli részét.)

2. Feladat Legyen $n \geq 3$ egész, és legyenek $a_2, a_3, \ldots, a_n$ olyan pozitív valós számok, amelyekre $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$. Bizonyítsuk be, hogy

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \cdots (1 + a_n)^n \; > \; n^n.$$

3. Feladat A *hazudós játék*ot két játékos játssza: A és B. A játék szabályaiban szerepel két pozitív egész szám: k és n, ezek értékét mindkét játékos ismeri.

A játék megkezdésekor A választ két egész számot: x-et és N-et, amikre $1 \leq x \leq N$. A az x számot titokban tartja, viszont N-et őszintén megmondja B-nek. B ezután megpróbál x-re vonatkozó információt szerezni A-tól a következő típusú kérdésekkel: B minden kérdésében megadja pozitív egész számok egy tetszőleges S halmazát (olyan S halmazt is megadhat, amit már korábban is megadott), és azt kérdezi A-tól, hogy x eleme-e ennek az S halmaznak. B akárhány ilyen típusú kérdést feltehet. A-nak B minden kérdésére a kérdés elhangzása után azonnal *igen*nel vagy *nem*mel kell válaszolnia, de mindegyik válasza lehet hazugság is; az egyetlen kikötés az, hogy bármely egymás utáni $k + 1$ válasz közül legalább egynek őszintének kell lennie.

Miután B annyiszor kérdezett, ahányszor csak akart, meg kell neveznie egy legfeljebb n pozitív egész számból álló X halmazt. Ha x eleme az X halmaznak, akkor B nyer; különben B veszít. Bizonyítsuk be:

1. Ha $n \geq 2^k$, akkor B-nek van nyerő stratégiája.

2. Minden elég nagy k-hoz van olyan $n \geq 1{,}99^k$ egész szám, amire B-nek nincs nyerő stratégiája.

Munkaidő: 4 és fél óra.
Mindegyik feladat helyes megoldásáért 7 pont adható.

2012. július 11., szerda

4. Feladat Határozzuk meg az összes olyan $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ függvényt, amire tetszőleges a, b, c egészekre, amelyekre $a + b + c = 0$ teljesül, fennáll az

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 \;=\; 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a)$$

egyenlőség. ($\mathbb{Z}$ az egész számok halmazát jelöli.)

5. Feladat Legyen az ABC háromszögben $BCA\sphericalangle = 90°$, és legyen D a C-ből induló magasságvonal talppontja. Legyen X a CD szakasz belső pontja. Legyen K az AX szakasznak az a pontja, amire $BK = BC$. Hasonlóan, legyen L a BX szakasznak az a pontja, amire $AL = AC$. Legyen M az AL és BK egyenesek metszéspontja.

Bizonyítsuk be, hogy $MK = ML$.

6. Feladat Határozzuk meg az összes olyan n pozitív egész számot, amelyhez találhatók olyan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nemnegatív egészek, amelyekre teljesül

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}} \;=\; \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{n}{3^{a_n}} \;=\; 1.$$

Munkaidő: 4 és fél óra.
Mindegyik feladat helyes megoldásáért 7 pont adható.