2014. július 8., kedd

1. Feladat Legyen $a_0 < a_1 < a_2 < \ldots$ pozitív egészeknek egy végtelen sorozata. Bizonyítsuk be, hogy létezik egy egyértelműen meghatározott $n \geqslant 1$ egész szám, amire

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_n}{n} \leqslant a_{n+1}.$$

2. Feladat Legyen $n \geqslant 2$ egész szám. Tekintsünk egy n^2 egységnégyzetből álló $n \times n$-es sakktáblát. n bástyának az elhelyezését ezen a sakktáblán *békés*nek nevezzük, ha minden sorban és minden oszlopban pontosan egy bástya áll. Határozzuk meg a legnagyobb olyan k pozitív egész számot, amire igaz az, hogy n bástya minden békés elhelyezéséhez található egy olyan $k \times k$-as négyzet, amelynek a k^2 egységnégyzete egyikén sem áll bástya.

3. Feladat Az $ABCD$ konvex négyszögben $ABC\sphericalangle = CDA\sphericalangle = 90°$. A H pont az A-ból BD-re bocsátott merőleges talppontja. Az S ill. T pont úgy helyezkedik el az AB ill. AD oldalszakaszon, hogy H az SCT háromszög belsejében van, és

$$CHS\sphericalangle - CSB\sphericalangle = 90°, \quad THC\sphericalangle - DTC\sphericalangle = 90°\,.$$

Bizonyítsuk be, hogy a BD egyenes érintője a TSH háromszög körülírt körének.

Munkaidő: 4 és fél óra
Mindegyik feladat helyes megoldásáért 7 pont adható.

2014. július 9., szerda

4. Feladat P és Q az ABC hegyessszögű háromszög BC oldalszakaszán úgy helyezkednek el, hogy $PAB\sphericalangle = BCA\sphericalangle$ és $CAQ\sphericalangle = ABC\sphericalangle$. Az M ill. N pontok az AP ill. AQ egyenesen úgy helyezkednek el, hogy P az AM szakasz felezőpontja és Q az AN szakasz felezőpontja. Bizonyítsuk be, hogy a BM és CN egyenesek az ABC háromszög körülírt körén metszik egymást.

5. Feladat Minden pozitív egész n-re a Fokvárosi Bank $\frac{1}{n}$ címletű érméket bocsát ki. Ha adott egy véges készlet ilyen (nem feltétlenül különböző címletű) érmékből, mely készletnek az összértéke legfeljebb $99 + \frac{1}{2}$, bizonyítsuk be, hogy a készletet feloszthatjuk 100 vagy kevesebb csoportra úgy, hogy minden csoportban az érmék összértéke legfeljebb 1.

6. Feladat A sík egyeneseinek egy halmazát *általános helyzetű*nek nevezzük, ha közöttük nincs két párhuzamos egyenes, és semelyik három egyenesnek nincs közös pontja. Általános helyzetű egyenesek egy halmaza a síkot tartományokra bontja, amelyek közül némelyek véges területűek; ezeket az egyeneshalmaz *véges tartományai*nak nevezzük.

Bizonyítsuk be, hogy minden elég nagy n-re teljesül az, hogy bármely, n általános helyzetű egyenesből álló halmaz egyenesei közül legalább $\sqrt{n}$ egyenest kékre tudunk színezni úgy, hogy nincs olyan véges tartomány, aminek a határa teljesen kék.

Megjegyzés: Olyan megoldásokra is adható pont, amelyek az állítást $\sqrt{n}$ helyett $c\sqrt{n}$-re bizonyítják; a pontszám a c konstans értékétől függ.

Munkaidő: 4 és fél óra
Mindegyik feladat helyes megoldásáért 7 pont adható.