2016. július 11., hétfő

1. Feladat A BCF háromszögnek B-nél derékszöge van. Legyen A a CF egyenes azon pontja, amelyre $FA = FB$, és az F pont A és C között fekszik. A D pontot úgy választjuk, hogy $DA = DC$ és AC a $DAB\sphericalangle$ szögfelezője. Az E pontot úgy választjuk, hogy $EA = ED$ és AD az $EAC\sphericalangle$ szögfelezője. Legyen M a CF szakasz felezőpontja. Legyen X az a pont, amire $AMXE$ parallelogramma (ahol $AM \parallel EX$ és $AE \parallel MX$). Bizonyítsuk be, hogy a BD, FX és ME egyenesek egy ponton mennek át.

2. Feladat Határozzuk meg azokat a pozitív egész n számokat, amelyekre egy $n \times n$-es táblázat minden mezőjére az I, M, O betűk valamelyikét tudjuk írni úgy, hogy:

- minden sorban és minden oszlopban a mezők egyharmadára I, egyharmadára M és egyharmadára O betű van írva; és
- minden átlóban, ha az átlóban lévő mezők száma 3 többszöröse, akkor ezen mezők egyharmadára I, egyharmadára M és egyharmadára O betű van írva.

Megjegyzés: Egy $n \times n$-es táblázat sorait és oszlopait természetes módon 1-től n-ig számozhatjuk. Így minden mezőhöz egy pozitív egészekből álló (i, j) számpár tartozik, ahol $1 \leqslant i, j \leqslant n$. $n > 1$ esetén a táblázatnak $4n - 2$ *átló*ja van, amelyek kétfélék lehetnek. Egy első típusú átló az összes (i, j) mezőkből áll, amelyekre $i + j$ egy adott konstans, egy második típusú átló pedig az összes (i, j) mezőkből áll, amelyekre $i - j$ egy adott konstans.

3. Feladat Legyen $P = A_1A_2 \ldots A_k$ egy konvex sokszög a síkon. Az A_1, A_2, $\ldots$, A_k csúcsok koordinátái egész számok, és ezek a csúcsok egy körön fekszenek. Legyen S a P sokszög területe. Adott egy n páratlan pozitív egész szám, amire teljesül az, hogy a P sokszög minden oldalhosszának a négyzete egy n-nel osztható egész szám. Bizonyítsuk be, hogy $2S$ egy n-nel osztható egész szám.

Munkaidő: 4 és fél óra.
Minden feladat helyes megoldásáért 7 pont adható.

2016. július 12., kedd

4. Feladat Pozitív egészek egy halmazát *illatos*nak nevezzük, ha legalább 2 eleme van, és minden eleméhez található legalább egy olyan másik eleme, hogy a két elemnek van közös prímosztója. Legyen $P(n) = n^2 + n + 1$. Mi a legkisebb olyan pozitív egész b érték, amihez található egy nemnegatív a egész szám úgy, hogy a

$$\{P(a+1), P(a+2), \ldots, P(a+b)\}$$

halmaz illatos?

5. Feladat Felírjuk a táblára az

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-2016) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2016)$$

egyenletet, ahol mindkét oldalon 2016 lineáris faktor szerepel. Mi az a legkisebb pozitív k érték, amelyre teljesül az, hogy elhagyhatunk e közül a 4032 lineáris faktor közül pontosan k darabot úgy, hogy mindkét oldalon maradjon legalább egy lineáris faktor, és az adódó egyenletnek ne legyen valós gyöke?

6. Feladat Adott a síkon $n \geqslant 2$ szakasz úgy, hogy bármely két szakasz keresztezi egymást, és semelyik három szakasznak sincsen közös pontja. Jeromosnak ki kell választania mindegyik szakasznak az egyik végpontját, és oda egy-egy békát elhelyezni úgy, hogy a béka a szakasz másik végpontja felé nézzen. Ezután Jeromos $(n-1)$-szer fog tapsolni. Mindegyik tapsolásra minden béka azonnal a szakaszon található következő metszéspontra ugrik. A békák az ugrásirányukat soha nem változtatják meg. Jeromos úgy szeretné elhelyezni a békákat, hogy soha ne legyen két béka azonos időben azonos metszésponton.

(a) Bizonyítsuk be, hogy Jeromos ezt mindig meg tudja tenni, ha n páratlan.

(b) Bizonyítsuk be, hogy Jeromos ezt soha nem tudja megtenni, ha n páros.

Munkaidő: 4 és fél óra.
Minden feladat helyes megoldásáért 7 pont adható.