2021. július 19., hétfő

1. Feladat Legyen $n \geqslant 100$ egész. Iván felírja az $n, n+1, \ldots, 2n$ számokat egy-egy különböző kártyára. Ezután összekeveri ezt az $n+1$ kártyát, és két pakliba osztja őket. Bizonyítandó, hogy legalább az egyik pakli tartalmaz két olyan kártyát, amelyekre írt számok összege négyzetszám.

2. Feladat Mutassuk meg, hogy az

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i - x_j|} \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i + x_j|}$$

egyenlőtlenség fennáll tetszőleges $x_1, \ldots, x_n$ valós számokra.

3. Feladat Legyen D olyan belső pontja az $AB > AC$ tulajdonságú, hegyesszögű ABC háromszögnek, hogy $\angle DAB = \angle CAD$. Az AC szakasz E pontjára $\angle ADE = \angle BCD$ teljesül, az AB szakasz F pontjára $\angle FDA = \angle DBC$ teljesül, és az AC egyenes X pontjára $CX = BX$ teljesül. Jelölje O_1 és O_2 az ADC, illetve EXD háromszög köré írt kör középpontját. Bizonyítandó, hogy a BC, EF és O_1O_2 egyenesek egy ponton mennek át.

Munkaidő: négy és fél óra.
Minden feladat helyes megoldásáért 7 pont adható.

2021. július 20., kedd

4. Feladat Legyen Γ egy I középpontú kör, és legyen $ABCD$ olyan konvex négyszög, hogy az AB, BC, CD és DA szakaszok mindegyike érinti Γ-t. Legyen Ω az AIC háromszög körülírt köre. A BA szakasz A-n túli meghosszabbítása Ω-t X-ben metszi, és a BC szakasz C-n túli meghosszabbítása Ω-t Z-ben metszi. Az AD, illetve a CD szakasz D-n túli meghosszabbítása Ω-t Y-ban, illetve T-ben metszi. Bizonyítandó, hogy

$$AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC.$$

5. Feladat Két mókus, Bozontos és Ugrálós, 2021 diót gyűjtött a télre. Ugrálós megszámozta a diókat 1-től 2021-ig, és ásott 2021 kis lyukat a talajba köralakú elrendezésben a kedvenc fájuk körül. Másnap reggel Ugrálós látta, hogy Bozontos mindegyik lyukba elhelyezett egy diót, de nem törődött a sorszámozással. Ugrálós elégedetlenségében elhatározta, hogy átrendezi a diókat 2021 egymást követő lépésben. A k-adik lépésben Ugrálós felcseréli a k sorszámú dióval szomszédos két diónak a helyzetét. Bizonyítandó, hogy létezik olyan k érték, hogy a k-adik lépésben Ugrálós olyan a és b sorszámú diókat cserél fel, amelyekre $a < k < b$.

6. Feladat Legyen $m \geqslant 2$ egész szám, A egy véges halmaza egész számoknak (amelyek nem feltétlenül pozitívak), és legyenek $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_m$ részhalmazai A-nak. Tegyük fel, hogy minden $k = 1, 2, \ldots, m$ esetén B_k elemeinek összege m^k. Bizonyítandó, hogy A legalább $m/2$ elemet tartalmaz.

Munkaidő: négy és fél óra.
Minden feladat helyes megoldásáért 7 pont adható.