Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny 2010/2011
Matematika I. kategória (SZAKKÖZÉPISKOLA)

Az 1. forduló feladatainak megoldása

1. **Az x valós számra teljesül, hogy**

$$16^{\sin^2 x} + 16^{\cos^2 x} = 10.$$

Határozza meg $\sin x$ értékét!

Megoldás:

A $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ trigonometrikus azonosság miatt $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, ezért felírhatjuk az eredetivel ekvivalens

(1) $$16^{\sin^2 x} + 16^{1-\sin^2 x} = 10$$

egyenletet. 1 pont

A hatványozás azonosságának alkalmazásával az (1) egyenletből azt kapjuk, hogy

(2) $$16^{\sin^2 x} + \frac{16}{16^{\sin^2 x}} = 10.$$ 1 pont

Vezessük be a $16^{\sin^2 x} = y$ jelölést ($y \neq 0$)! Ekkor a (2) egyenletből először az

$$y + \frac{16}{y} = 10,$$

majd ekvivalens átalakításokkal az

(3) $$y^2 - 10y + 16 = 0$$

következik. 2 pont

A (3) egyenlet gyökei

$$y_1 = 2 \text{ és } y_2 = 8.$$ 1 pont

Az $y_1 = 2$ esetben

$$16^{\sin^2 x} = 2,$$

azaz

$$2^{4 \cdot \sin^2 x} = 2^1,$$

innen az exponenciális függvény kölcsönösen egyértelmű tulajdonsága miatt előbb

$$4 \cdot \sin^2 x = 1,$$

majd

(4) $$\sin^2 x = \frac{1}{4}$$

adódik.

A (4) egyenletből

$$\sin x = \frac{1}{2}, \text{ vagy } \sin x = -\frac{1}{2}$$

2 pont

következik.

Az $y_2 = 8$ esetben pedig

$$16^{\sin^2 x} = 8,$$

és ezért

$$2^{4\cdot\sin^2 x} = 2^3,$$

innen ismét az exponenciális függvény kölcsönösen egyértelmű tulajdonságára hivatkozva kapjuk, hogy

$$4 \cdot \sin^2 x = 3,$$

illetve

(5) $$\sin^2 x = \frac{3}{4}.$$

Az (5) egyenletből

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ vagy } \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2 pont

A $\sin x = \pm\frac{1}{2}$ és $\sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ valóban megoldásai a feladatnak, mert $-1 \le \sin x \le +1$ teljesül, és így vannak olyan x valós számok (végtelen sok), melyekre $\sin x = \pm\frac{1}{2}$, illetve $\sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1 pont

Összesen: 10 pont

2. **A valós számok halmazán egy új műveletet definiálunk. Bármely $a; b$ valós számpárra legyen**

$$a \Delta b = 2a + 3b.$$

Milyen feltételeknek kell teljesülnie az $a; b; c$ valós számhármas tagjaira, ha fennáll, hogy

$$a \Delta (b \Delta c) = (a \Delta b) \Delta c \ ?$$

Megoldás:

Tekintsük először a baloldalt! Mivel az új művelet definíciója szerint bármely $a; b$ valós számpárra $a \Delta b = 2a + 3b$, ezért egyrészt

(1) $$b \Delta c = 2b + 3c,$$

másrészt

(2) $$a \Delta (b \Delta c) = 2a + 3 \cdot (b \Delta c).$$ 1 pont

(1)-et (2)-be helyettesítve

$$a \Delta (b \Delta c) = 2a + 3 \cdot (2b + 3c),$$

ahonnan a műveletek elvégzése után

(3) $$a \Delta (b \Delta c) = 2a + 6b + 9c.$$ 2 pont

A jobboldalon hasonlóképpen kapjuk, hogy

(4) $$a \Delta b = 2a + 3b$$

valamint

(5) $$(a \Delta b) \Delta c = 2 \cdot (a \Delta b) + 3c$$ 1 pont

(4)-et az (5)-be helyettesítve, és a műveleteket elvégezve:

(6) $$(a \Delta b) \Delta c = 4a + 6b + 3c.$$ 2 pont

Azokat a feltételeket keressük, amelyek mellett fennáll, hogy

$$a \Delta (b \Delta c) = (a \Delta b) \Delta c,$$

így (3) és (6) alapján

(7) $$2a + 6b + 9c = 4a + 6b + 3c$$

kell, hogy teljesüljön, ezért (7) megoldásait keressük. 1 pont

A (7) egyenletből rendezés után azt kapjuk, hogy

(8) $$a = 3c.$$ 1 pont

(8) szerint ahhoz, hogy új műveletünkre teljesüljön az

$$a \Delta (b \Delta c) = (a \Delta b) \Delta c,$$

(vagyis, hogy ez a művelet asszociatív legyen) kell, hogy „a” és „c” közt fennálljon az

$$a = 3c$$

összefüggés, és „b” értéke tetszőleges lehet ($a, b, c \in R$). 2 pont

Összesen: 10 pont

3. **Egy derékszögű háromszög oldalhosszainak összege 84, az oldalak hosszának négyzetösszege 2738.**

   Határozza meg a beírt kör sugarának hosszát!

Megoldás:

Jelölje a és b a derékszögű háromszög befogóinak, c pedig az átfogójának a hosszát.

A feladat egyik feltétele:

(1) $$a + b + c = 84,$$

azaz a háromszög K-val jelölt kerülete:

$$K = 84.$$

A másik feltétel:

(2) $$a^2 + b^2 + c^2 = 2738.$$ 1 pont

Derékszögű háromszögünkre a Pitagorasz-tétel szerint

(3) $$a^2 + b^2 = c^2,$$

ezt (2)-be helyettesítve

$$2c^2 = 2738,$$

vagyis

$$c^2 = 1369,$$

amiből

$$c = 37,$$

(Például a négyzetgyöktáblázatból kiolvasható). 2 pont

(1)-be helyettesítve c értékét, kapjuk, hogy

(4) $$a + b = 47.$$ 1 pont

(4) mindkét oldalának négyzetre emelésével:

(5) $$a^2 + 2ab + b^2 = 2209.$$ 1 pont

(3)-at (5)-be helyettesítve, valamint $c^2 = 1369$-et figyelembevéve

(6) $$2 \cdot a \cdot b = 840$$

adódik.

Jelöléseinknek megfelelően a derékszögű háromszög területe $T = \frac{a \cdot b}{2}$, ezért (6) szerint

$$T = 210 \text{ területegység.}$$ 2 pont

Ismeretes, hogy $T = r \cdot s$, ahol „T" a háromszög területe, „r" a beírt kör sugara, „s" pedig a kerületének a fele. 1 pont

A $K = 84$ és $T = 210$ értékekből kiszámítva kapjuk, hogy

$$r = 5,$$

tehát a derékszögű háromszög beírt körének sugara 5 egység hosszúságú. 2 pont

Összesen: 10 pont

4. **Mely pozitív p prímszámokra teljesül, hogy**

360 osztója a $p^4 - 5p^2 + 4$

kifejezésnek?

Megoldás:

Először szorzattá alakítjuk a $p^4 - 5p^2 + 4$ kifejezést.
Eszerint:
(1) $$p^4 - 5p^2 + 4 = (p^2 - 1)\cdot(p^2 - 4).$$

(1) jobb oldalának mindkét tényezője tovább bontható. (1)-ből, a szorzótényezők sorrendjének átrendezésével:

(2) $$p^4 - 5p^2 + 4 = (p-2)\cdot(p-1)\cdot(p+1)\cdot(p+2).$$ 2 pont

Mivel $360 = 5\cdot 8\cdot 9$, és az $5; 8; 9$ számok páronként relatív prímek, azaz $(5;8) = 1$, és $(5;9) = 1$ és $(8;9) = 1$, ezért a $p^4 - 5p^2 + 4$ kifejezés pontosan akkor osztható 360-nal, ha osztható az $5; 8; 9$ számok mindegyikével. 1 pont

a) Vizsgáljuk meg az 5-nél nem nagyobb p prímszámok esetén a kifejezést!
Ha $p = 2$, akkor (2) szerint $p^4 - 5p^2 + 4 = 0$, vagyis $p^4 - 5p^2 + 4$ osztható 360-nal.
Ha $p = 3$, akkor $p^4 - 5p^2 + 4 = 1\cdot 2\cdot 4\cdot 5 = 40$, nem osztható 360-nal.
Ha $p = 5$, akkor $p^4 - 5p^2 + 4 = 3\cdot 4\cdot 6\cdot 7$, ami nem osztható 5-tel, tehát 360-nal sem osztható. 2 pont

b) A $p > 5$ esetben p páratlan, ezért $p-1$ és $p+1$ két egymást követő páros szám, amelyek közül az egyik biztosan osztható 2-vel, a másik 4 -gyel, így a $(p-2)\cdot(p-1)\cdot(p+1)\cdot(p+2)$ szorzat osztható 8-cal. 1 pont

Ha $p > 5$, akkor p nem osztható 3-mal, így felírható $p = 3n \pm 1$ alakban ($n \in N$). Így a $(p-2)\cdot(p-1)\cdot(p+1)\cdot(p+2)$ szorzat valamelyik két tényezője biztosan osztható 3-mal, ezért a szorzat osztható 9-cel. (Például a $p = 3n - 1$ esetén $p-2$ és $p+1$) 1 pont

Ha $p > 5$, akkor p nem osztható 5-tel, ezért $p = 5k \pm 1$ vagy $p = 5k \pm 2$ alakban is felírható, ahol k pozitív egész szám.

Ebből következik, hogy a $(p-2)\cdot(p-1)\cdot(p+1)\cdot(p+2)$ szorzat valamelyik tényezője biztosan osztható 5-tel. (például $p = 5k - 1$ esetén a $p+1$) 1 pont

Azt kaptuk tehát, hogy ha $p > 5$, akkor $p^4 - 5p^2 + 4$ osztható 5-tel, 8-cal és 9-cel is, vagyis osztható 360-nal. 1 pont

c) Eszerint a 3 és 5 prímszámok kivételével minden p prímre teljesül, hogy $p^4 - 5p^2 + 4$ osztható 360-nal. 1 pont

Összesen: 10 pont

5. **Határozza meg az** a **számjegyet úgy, hogy a tízes számrendszerbeli** $N=\underbrace{999...9}_{100\ db}a\underbrace{000...0}_{100\ db}9$ **alakú szám egy egész szám négyzete legyen!**

Megoldás:

Mivel,

$$\underbrace{999...9}_{100darab}=10^{100}-1$$

ezért N átírható az

$$N=\left(10^{100}-1\right)\cdot 10^{102}+a\cdot 10^{101}+9$$

2 pont

alakba, ahonnan

(1) $$N=10^{202}-(10-a)\cdot 10^{101}+9\ .$$

„a" számjegy, ezért

$$0\le \mathrm{a}\le 9\ ,$$

majd

$$1\le 10-a\le 10\ .$$

Ezt végigszorozva -10^{101}-nel

$$-10^{102}\le -(10-a)\cdot 10^{101}\le -10^{101}\ ,$$

amiből

$$-10^{102}+9\le -(10-a)\cdot 10^{101}+9\le -10^{101}+9\ .$$

Továbbalakítva

$$10^{202}-10^{102}+9\le 10^{202}-(10-\mathrm{a})\cdot 10^{101}+9\le 10^{202}-10^{101}+9\ .$$

Ezt (1)-gyel összevetve kapjuk, hogy

2 pont

$$N<10^{202}\ ,$$

(2) $$N<\left(10^{101}\right)^2\ .$$

Másrészt

$$10^{202}-20\cdot 10^{101}+100<10^{202}-(10-a)\cdot 10^{101}+9$$

egyenlőtlenség minden, az $0\le a\le 9$ egyenlőtlenségnek eleget tevő „a" számjegyre teljesül, hiszen ekvivalens lépésekkel következik a

$$91<(10+a)\cdot 10^{101}$$

egyenlőtlenségből, ami nyilvánvalóan igaz.

Tehát

$$10^{202}-20\cdot 10^{101}+100<\mathrm{N}\ ,$$

2 pont

(3) $$\left(10^{101}-10\right)^2 < N.$$

A (2) és (3) egyenlőtlenségek szerint N két négyzetszám közé esik, mégpedig

(4) $$\left(10^{101}-10\right)^2 < N < \left(10^{101}\right)^2,$$

közé.

De N maga is négyzetszám, így

$$\sqrt{\mathrm{N}} = 10^{101} - \mathrm{k}, \text{ ahol } 1 < \mathrm{k} < 10.$$

Mivel N 9-re végződik, ezért $\sqrt{\mathrm{N}}$ csak 7-re, vagy 3-ra végződhet, azaz „k” csak 7 vagy 3 lehet, azaz

(5) $$N = \left(10^{101}-7\right)^2, \text{ vagy } N = \left(10^{101}-3\right)^2$$ 2 pont

jöhet szóba.

Összevetve (1)-et és (5)-öt, következik, hogy

$$10 - \mathrm{a} = 2 \cdot 7 = 14 \text{ vagy } 10 - \mathrm{a} = 2 \cdot 3 = 6$$

Az elsőből kapott $a = -4$ ellentmond annak, hogy a számjegy, a másodikból azt kapjuk, hogy $a = 4$, ez megfelel minden feltételnek. 1 pont

Eszerint $a = 4$ az egyetlen számjegy, amely mellett az N négyzetszám, mégpedig

$$\mathrm{N} = \left(10^{101}-3\right)^2 = \underbrace{999...9}_{100\text{ db}}4\underbrace{000...0}_{100\text{ db}}9.$$

Összesen: 1 pont

10 pont

Megjegyzés:

$\mathrm{k} = 7$-et úgy is kizárhatjuk, hogy $7^2 = 49$ esetén a 10-es helyiértéken ellentmondást kapunk, hiszen 0 volt és nem lehet 4.

6. **Igazolja, hogy ha valamely háromszög területe $\frac{1}{2}$ területegység, akkor kerülete 3 hosszúságegységnél nagyobb!**

<u>1. Megoldás:</u>

Legyenek a háromszög $a; b; c$ hosszúságú oldalaihoz tartozó magasságok rendre $m_a; m_b; m_c$.

Ekkor a háromszög területe $T = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{b \cdot m_b}{2} = \frac{c \cdot m_c}{2} = \frac{1}{2}$, amelyből

(1) $$a \cdot m_a = b \cdot m_b = c \cdot m_c = 1.$$

Alkalmazzuk az $a; m_a$, $b; m_b$ és $c; m_c$ pozitív számokból álló számpárokra a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget, és vegyük figyelembe (1)-et

2 pont

$$\frac{a + m_a}{2} \geq \sqrt{a \cdot m_a},$$

(2) $$a + m_a \geq 2,$$

$$\frac{b + m_b}{2} \geq \sqrt{b \cdot m_b},$$

(3) $$,b + m_b \geq 2,$$

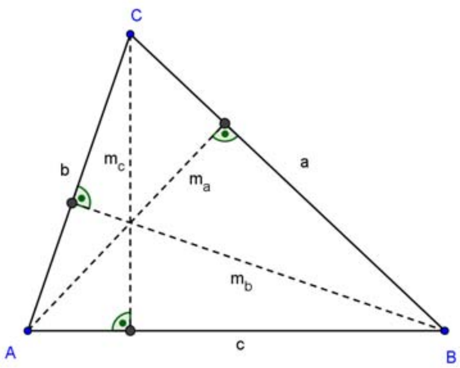
$$\frac{c + m_c}{2} \geq \sqrt{c \cdot m_c},$$

(4) $$c + m_c \geq 2.$$

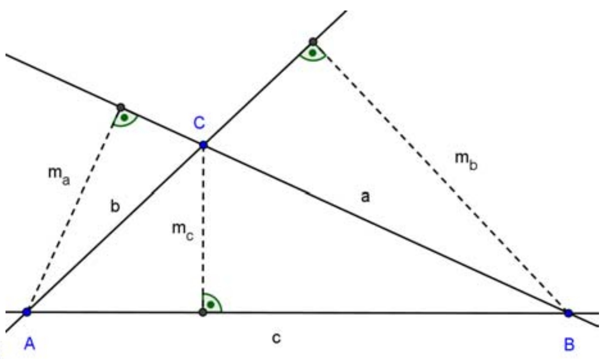
A (2)-(3)-(4) megfelelő oldalait összeadva, azt kapjuk, hogy 2 pont

(5) $$(a + b + c) + (m_a + m_b + m_c) \geq 6.$$

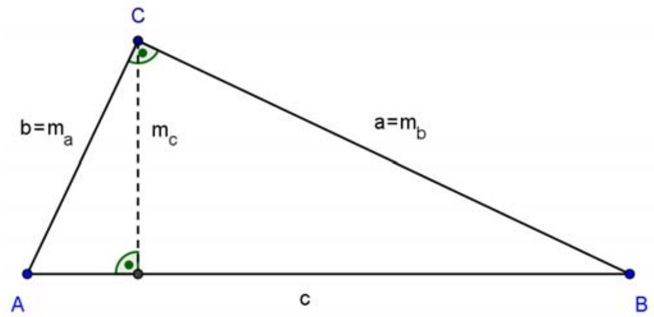
A következő ábrákon a háromszögeket az egyes oldalakhoz tartozó magasságokkal ábrázoltuk hegyes, tompa és derékszögű háromszög esetén. 1 pont



1. ábra



2. ábra



3. ábra

Mivel a derékszögű háromszög átfogója hosszabb, mint bármelyik befogó, ezért az ábrákról leolvashatjuk, hogy mindhárom esetben teljesülnek az

(6) $$\mathrm{a} \ge \mathrm{m}_\mathrm{b},$$

(7) $$\mathrm{b} \ge \mathrm{m}_\mathrm{c},$$

(8) $$\mathrm{c} \ge \mathrm{m}_\mathrm{a}$$

egyenlőtlenségek, amelyekben egyszerre nem állhat fenn az egyenlőség esete. 2 pont

Összeadva (6), (7) és (8) megfelelő oldalait 1 pont

$$a+b+c > m_a + m_b + m_c,$$

ebből pedig (5) alapján azt kapjuk, hogy 1 pont

$$2 \cdot (a+b+c) > 6,$$

azaz

$$a+b+c > 3,$$

és éppen ezt kellett bizonyítani. 1 pont

Összesen: 10 pont

2. megoldás:

Legyenek a háromszög oldalai $a; b; c$ hosszúságúak, ekkor a háromszög félkerülete $s = \dfrac{a+b+c}{2}$, ezzel a jelöléssel felírható a háromszög területe a Héron-képlettel, azaz

$$T = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}.$$

A feladat adatával: 1 pont

(1) $$\sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} = \frac{1}{2}.$$

Az (1) összefüggés ekvivalens átalakításával kapjuk, hogy

(2) $$4s = \frac{1}{(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}.$$ 1 pont

A pozitív $s-a$; $s-b$; $s-c$ számokra felírjuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget, eszerint $\sqrt[3]{(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)} \le \frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3} = \frac{s}{3}$, ebből köbreemeléssel és rendezéssel adódik, hogy

(3) $$(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c) \le \frac{s^3}{27}.$$ 2 pont

(2) és (3) együttesen azt jelentik, hogy

(3) $$4s \ge \frac{1}{\frac{s^3}{27}},$$

ebből pedig

(4) $$s \ge \sqrt[4]{\frac{27}{4}},$$

majd

$$s \ge \sqrt[4]{\frac{81\cdot 4}{16\cdot 3}} = \sqrt[4]{\frac{3^4\cdot 2^2}{3\cdot 2^4}},$$

$$s \ge \frac{3}{2}\sqrt[4]{\frac{4}{3}}.$$ 2 pont

Mivel $K = 2s$, a háromszög kerületére a következő egyenlőtlenséget kapjuk:

(5) $$K \ge 3\cdot\sqrt[4]{\frac{4}{3}}.$$ 2 pont

Az $f(x) = \sqrt[4]{x}$ függvény tulajdonsága, hogy minden $x > 1$ valós számra $\sqrt[4]{x} > 1$, ezért

$$\sqrt[4]{\frac{4}{3}} > 1,$$ 1 pont

így (5)-ből

$$K > 3$$

következik, ez pedig éppen a bizonyítandó állítás. 1 pont

Összesen: 10 pont