



A 2014/2015. tanévi  
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny  
első forduló

## MATEMATIKA

### I. KATEGÓRIA (SZAKKÖZÉPISKOLA)

#### Javítási-értékelési útmutató

1. Határozza meg a tízes számrendszerbeli  $x = \overline{abba}$  és  $y = \overline{abab}$  ( $a \neq b$ ) páros természetes számokat úgy, hogy az  $x + y$  összeg osztható legyen 7-tel!

Megoldás:

Mivel  $x = \overline{abba}$  és  $y = \overline{abab}$  tízes számrendszerbeli számok, ezért

$$(1) \quad x = 1001a + 110b \quad \text{és} \quad y = 1010a + 101b.$$

1 pont

A két szám összege

$$(2) \quad x + y = 2011a + 211b.$$

1 pont

Maradékos osztással  $2011 = 287 \cdot 7 + 2$  és  $211 = 30 \cdot 7 + 1$ , ezért (2)-ből az következik, hogy

$$x + y = 287 \cdot 7a + 30 \cdot 7b + 2a + b,$$

innen pedig

$$(3) \quad x + y = 7 \cdot (287a + 30b) + 2a + b.$$

2 pont

(3) szerint  $x + y$  pontosan akkor osztható 7-tel, ha  $2a + b$  osztható 7-tel.

1 pont

A feltétel szerint  $a$  és  $b$  páros számjegyek, valamint  $a \neq b$ , így a  $2a + b$  összeg 24-nél kisebb 7-tel osztható pozitív páros szám, azaz

$$(4) \quad 2a + b = 14.$$

2 pont

(4)-ből két megoldást kapunk:

$$a = 6; b = 2, \quad \text{valamint} \quad a = 4; b = 6.$$

2 pont

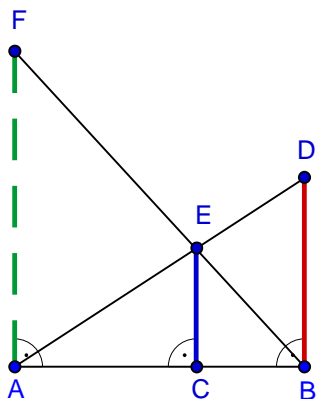
A feladatra összesen 2 megoldáspár adódik

$$x = 6226; y = 6262, \quad \text{illetve} \quad x = 4664; y = 4646.$$

1 pont

Összesen: 10 pont

2. Az  $AF$ ;  $CE$  és  $BD$  szakaszok az alábbi ábrának megfelelően helyezkednek el. A  $CE$  szakasz hossza 24, a  $BD$  szakasz hossza 40 egységnyi. Hány egység hosszúságú az  $AF$  szakasz?



Megoldás:

Az  $AF$ ;  $CE$  és  $BD$  szakaszok mindegyike az ábra szerint merőleges az  $AB$  szakaszra, ezért a szakaszok párhuzamosak egymással.

1 pont

A  $DAB\angle$ -et metsző  $CE$  és  $BD$  szakaszokra felírjuk a párhuzamos szelőszakaszok tételét:

$$(1) \quad \frac{AC}{AB} = \frac{CE}{BD} = \frac{24}{40} = \frac{3}{5}.$$

2 pont

A  $FBA\angle$ -et metsző  $CE$  és  $AF$  szakaszokra is felírjuk a párhuzamos szelőszakaszok tételét:

$$(2) \quad \frac{BC}{AB} = \frac{CE}{AF} = \frac{24}{AF}.$$

2 pont

Az (1) és (2) megfelelő oldalait összeadva azt kapjuk, hogy  $\frac{AC}{AB} + \frac{BC}{AB} = \frac{3}{5} + \frac{24}{AF}$ .

Mivel azonban  $AC + BC = AB$ , ezért

$$(3) \quad 1 = \frac{3}{5} + \frac{24}{AF}.$$

3 pont

(3)-ból egyszerű számolással adódik, hogy  $AF = 60$ , tehát az  $AF$  szakasz 60 egység hosszúságú.

2 pont

Összesen: 10 pont

3. Oldja meg az  $x^2 + y^2 - 8z = 14$  egyenletet az egész számok halmazán!

I. Megoldás:

Az  $x$ ;  $y$  egész számok nem lehetnek egyszerre párosak, mert akkor  $x^2$  és  $y^2$  is 4-gyel osztható, így az egyenlet bal oldala 4-gyel osztható, miközben a jobb oldal nem osztható 4-gyel. 1 pont

Az sem állhat fenn, hogy az  $x$ ;  $y$  egész számok közül az egyik páros, a másik páratlan, mert ekkor az egyenlet bal oldala páratlan egész szám, míg a jobb oldala páros. 1 pont  
 Ezért csak az lehetséges, hogy az  $x$ ;  $y$  egész számok mindegyike páratlan. 1 pont

Legyen ezért  $x = 2k + 1$  és  $y = 2m + 1$ , ahol  $k; m \in \mathbb{Z}$ . 1 pont

Eszerint  $4k^2 + 4k + 1 + 4m^2 + 4m + 1 - 8z = 14$ , ahonnan rendezéssel:

$$(1) \quad 4k^2 + 4k + 4m^2 + 4m - 8z = 12. \quad \text{1 pont}$$

(1) mindkét oldalát 4-gyel osztva azt kapjuk, hogy  $k^2 + k + m^2 + m - 2z = 3$ , amelyből kiemelés után

$$(2) \quad k \cdot (k + 1) + m \cdot (m + 1) - 2z = 3. \quad \text{2 pont}$$

A  $k$  és  $k + 1$ , illetve  $m$  és  $m + 1$  közvetlen egymás utáni egész számok, ezért  $k \cdot (k + 1)$ , illetve  $m \cdot (m + 1)$  páros számok. 2 pont

Ugyanakkor nyilvánvaló, hogy  $2z$  is páros egész szám, ezért (2) bal oldala páros, jobb oldala pedig páratlan egész szám. Ez nem lehetséges, tehát (2) nem teljesülhet egyetlen  $k; m; z$  egész számokból álló számhármásra sem.

Minden esetet megvizsgáltunk, megoldást egyetlen esetben sem kaptunk, az  $x^2 + y^2 - 8z = 14$  egyenletnek tehát nincs megoldása az egészekből álló számhármások halmazán. 1 pont

Összesen: 10 pont

II. Megoldás:

Az  $x$ ;  $y$  egész számok mindegyike páratlan. (előző megoldásban részletezve) 3 pont

Átrendezve az egyenletet:

$$x^2 - 1 + y^2 - 1 - 8z = 12$$

$$(x - 1)(x + 1) + (y - 1)(y + 1) - 8z = 12$$

Itt a két szorzatban két egymás utáni páros szám áll, tehát mindkét szorzat osztható 8-cal. 2 pont

A bal oldal egy 8-cal osztható szám  $z$  értékétől függetlenül. 3 pont

A jobb oldalon a 12 nem osztható 8-cal. 1 pont

Tehát nincs megoldása az egyenletnek. 1 pont

Összesen: 10 pont

4. Oldja meg a valós számok halmazán az

$$\log_5(x+4) \cdot \log_5(x-1) = \log_5((x+4)^2 \cdot (x-1)) - 2$$

egyenletet!

Megoldás:

A logaritmus értelmezése miatt  $x > -4$ , illetve  $x > 1$ , ezért a feladat megoldásait az  $A = ]1; \infty[$  halmazon keressük.

1 pont

Az egyenlet jobb oldala a logaritmus azonosságai miatt átalakítható, így

$$(1) \quad \log_5(x+4) \cdot \log_5(x-1) = 2 \cdot \log_5(x+4) + \log_5(x-1) - 2.$$

2 pont

Végezzük el az  $a = \log_5(x+4)$  és a  $b = \log_5(x-1)$  helyettesítéseket, ezekkel (1) a következő alakba írható:

$$(2) \quad a \cdot b = 2a + b - 2.$$

2 pont

A (2) egyenlet rendezésével és kiemeléssel:

$$(3) \quad (a-1) \cdot (b-2) = 0.$$

A (3) egyenlet szerint  $a = 1$  vagy  $b = 2$  lehetséges.

2 pont

Ha  $a = 1$ , akkor  $\log_5(x+4) = 1$ , ebből a logaritmus definíciója szerint  $x+4 = 5$ , azaz  $x = 1$  következik. Ez a szám azonban nem eleme az  $A = ]1; \infty[$  halmaznak, ezért nem megoldás.

1 pont

Ha pedig  $b = 2$ , akkor  $\log_5(x-1) = 2$ , innen a logaritmus definíciója alapján azt kapjuk, hogy  $x-1 = 25$ , azaz  $x = 26$ .

1 pont

Ez a szám megfelel a feladat feltételeinek és behelyettesítéssel ellenőrizhetjük, hogy valóban megoldása a feladatnak. 1 pont

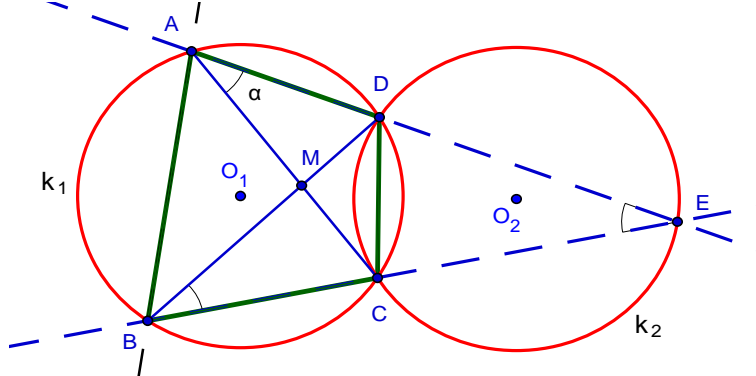
Összesen: 10 pont

5. Az  $ABCD$  húrnégyszög  $BC$  és  $AD$  oldalainak egyenesei a hegyesszögű  $CDE$  háromszöget zárják közre. A  $CDE$  háromszög körülírt körének sugara megegyezik az  $ABCD$  húrnégyszög körülírt körének sugarával.

Bizonyítsa be, hogy  $\frac{AB}{CD} = 2 \cdot \cos(\angle CED)$ !

Megoldás:

Jelöléseink az ábrán láthatók.



1 pont

A  $k_1$  és  $k_2$  körök sugara egyenlő, legyen ez a sugár  $R$ .

A  $k_1$  körben a  $CD$  húrhoz az ábra jelölése szerint,  $a$  nagyságú kerületi szög tartozik.

Egyenlő sugarú körökben az egyenlő hosszúságú húrokhoz egyenlő nagyságú kerületi szögek tartoznak, ezért a  $k_2$  körben, amelynek  $CD$  ugyancsak húrja, a  $CD$  húrhoz szintén  $a$  nagyságú kerületi szög tartozik, vagyis

$$\angle CED = a . \quad 2 \text{ pont}$$

A kerületi szögek tétele miatt a  $k_1$  körben  $\angle CBD = a$ , így a  $BED$  háromszög egyenlő szárú háromszög, mert a  $BE$  alapon fekvő szögei egyenlők. A  $BED$  háromszögnek  $\angle BDA$  külső szöge, ezért

$$\angle BDA = 2a . \quad 2 \text{ pont}$$

Ismeretes, hogy a kör egy húrjának hossza kifejezhető a kör sugarával és a húrhoz tartozó kerületi szög szinuszával. Eszerint egyrészt a  $k_1$  körben  $AB = 2R \cdot \sin 2a$ , másrészt a  $k_2$  körben  $CD = 2R \cdot \sin a$ .

1 pont

Ebből azt kapjuk, hogy

$$\frac{AB}{CD} = \frac{2R \cdot \sin 2a}{2R \cdot \sin a} . \quad 2 \text{ pont}$$

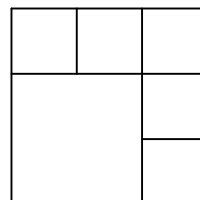
Felhasználva a  $\sin 2a = 2 \cdot \sin a \cdot \cos a$  trigonometriai azonosságot, egyszerűsítés után (nyilvánvaló, hogy  $\sin a \neq 0$ ), azt kapjuk, hogy

$$\frac{AB}{CD} = 2 \cdot \cos a , \quad \underline{2 \text{ pont}}$$

ez pedig a bizonyítandó állítással.

Összesen: 10 pont

6. Hányféleképpen írhatjuk be az ábrán látható négyzetekbe az 1; 2; 3; 4; 5; 6 számokat úgy, hogy a szomszédos négyzetekbe írt számok különbsége ne legyen 3? (Szomszédosnak tekintünk két négyzetet, ha van közös oldaluk.)



Megoldás:

A megadott számokból három pár képezhető aszerint, hogy mely számpárok nem kerülhetnek szomszédos mezőbe, ezek:

- (1)  $(1; 4)$ ,  $(2; 5)$  és  $(3; 6)$ . 2 pont

A nagy négyzetbe bármelyik számot beírhatjuk, tehát ennek kitöltésére 6 lehetőségünk van, ekkor viszont a nagy négyzetbe írt szám (1)-nek megfelelő párját a jobb felső mezőbe kell írunk. 2 pont

A bal felső mezőbe a megmaradt 4 szám bármelyike kerülhet, az ide írt szám (1)-ben látható párját két helyre írhatjuk: a jobb oldali középső vagy alsó mezőbe. 2 pont

Az előző elhelyezések után már csak egy (1) szerinti számpár maradt, ezeket kétféleképpen helyezhetjük el, hiszen ha eldöntöttük, hogy melyiket írjuk a felső középső mezőbe, a másik nyilván az utolsó üres mezőbe kerül. 2 pont

Az összes kitöltési lehetőségek száma tehát  $6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 = 96$ . 2 pont

Összesen: 10 pont