Oktatási Hivatal

A 2014/2015. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
második forduló

MATEMATIKA I. KATEGÓRIA
(SZAKKÖZÉPISKOLA)

FELADATOK

1. feladat: Adja meg az összes olyan (x, y) valós számpárt, amely megoldása a következő egyenletrendszernek:

$$\begin{cases} x^2y + xy^2 = 6 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{2} \end{cases}.$$

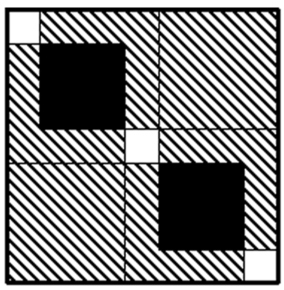
2. feladat: Az $ABCD$ rombusz hegyesszöge $45°$. Mutassa meg, hogy a rombusz beírt körének tetszőleges P pontjára teljesül

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = \frac{5}{2}AB^2.$$

3. feladat: Egy négyzetes oszlop alapélének és magasságának számértéke egész. A négyzetes oszlop V térfogatának és A felszínének mérőszámai között fennáll a $V = 2015 \cdot A$ összefüggés. Hány olyan nem egybevágó négyzetes oszlop létezik, amely megfelel ezeknek a feltételeknek?

4. feladat: Az ABC háromszög szögei $CAB\angle = 75°$ és $ABC\angle = 60°$. Legyenek az ABC háromszög magasságpontjának a BC, CA és AB oldalakra vonatkozó tükörképei rendre X, Y és Z pontok. Közelítő értékek használata nélkül határozza meg az XYZ és ABC háromszögek területének arányát!

5. feladat: Papírból 6 darab a cm oldalhosszúságú négyzetet vágtunk ki, majd azokból egy-egy L-alakot raktunk le a b cm oldalhosszúságú, négyzet alakú asztallap két szemközti csúcsánál az ábra szerint. (A hatoldalú L-alak kettő oldala $2a$, négy oldala pedig a hosszúságú.) Így az asztallap két feketével jelölt része kétszer, a csíkozással jelölt része pedig egyszer fedett. A nem fedett részek területének összege, a kétszer fedett (fekete) részek területének összege és az egyszer fedett (csíkozott) részek területének összege cm^2-ben mérve, ebben a sorrendben egy pozitív tagokból álló, monoton növő számtani sorozat egymást közvetlenül követő tagjai. (Az ábra nem méretarányos.) Határozza meg a b és a oldalak arányának pontos értékét!



Minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér.