Oktatási Hivatal

A 2016/2017. tanévi Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny

második forduló

MATEMATIKA I. KATEGÓRIA (SZAKGIMNÁZIUM, SZAKKÖZÉPISKOLA)

FELADATOK

1. Egy számtani sorozat első tagja 101, differenciája egyjegyű természetes szám. Hányadik tagja ennek a sorozatnak a 997, ha ismert, hogy ez a szám a sorozat legnagyobb háromjegyű tagja?

2. Egy $3x3$ -as táblázat egységnégyzeteibe beírjuk 1-től 9-ig a számokat (mindegyiket pontosan egyszer). Ezután a $3x3$ -as táblázatra minden lehetséges módon ráteszünk egy négy egységnégyzetből álló $2x2$-es táblázatot és kiszámítjuk az ebben levő négy szám összegét, végül az így kapott összegeket összeadjuk. Ezt megismételjük a $3x3$-as táblázat minden lehetséges kitöltése esetén.

   a) Határozza meg a fenti módon kapható összegek minimumát és maximumát!

   b) Megkapható-e minden, a minimum és a maximum közé eső pozitív egész szám? (Válaszát indokolja!)

3. Bizonyítsa be az $(ab + b^2) \cdot (a^2 + ba) \leq 1$ egyenlőtlenséget, ha a és b olyan pozitív valós számok, amelyekre teljesül, hogy $a^2 + b^2 = 1$!
   Mikor áll fenn egyenlőség?

4. Határozza meg azt a legkisebb p természetes számot, amelyre az

$$log_{1-2x}(x + 2p) = 1 + log_{\frac{1}{1-2x}}(p - x)$$

   egyenlet mindkét oldala értelmezhető és az egyenletnek van legalább egy valós megoldása!

5. Az egységnyi oldalhosszúságú ABC szabályos háromszög BC oldalának tetszőleges belső pontja D. Forgassa el a D pontot az A körül 60°-kal negatív irányba, a kapott pont legyen E.
   Legyen továbbá az AB és DE egyenesek közös pontja F.
   Határozza meg az AF szakasz hosszának minimális értékét!

Minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér.