OKTATÁSI HIVATAL

A 2020/2021. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
második forduló

MATEMATIKA I. KATEGÓRIA
(szakgimnázium, technikum)

Javítási-értékelési útmutató

1. Melyek azok az x, y valós számpárok, amelyekre teljesül az alábbi egyenletrendszer?

$$\begin{cases}(x+y)\cdot\left(x^2-y^2\right)=400\\(x-y)\cdot\left(x^2+y^2\right)=232\end{cases}$$

Első megoldás:

Felbontjuk a zárójeleket mindkét egyenletben:

$$\begin{cases}x^3+x^2y-xy^2-y^3=400\\x^3-x^2y+xy^2-y^3=232\end{cases}.$$ 1 pont

Az egyenleteket összeadjuk, így a

(1) $$2x^3-2y^3=632$$

egyenlethez jutunk. Az első egyenletből kivonva a második egyenletet a

(2) $$2x^2y-2xy^2=168$$

egyenletet kapjuk. Az (1) és (2) egyenleteket 2-vel osztjuk, és a következő egyenletrendszert írjuk fel:

$$\begin{cases}x^3-y^3=316\\x^2y-xy^2=84\end{cases}.$$ 2 pont

Ezen egyenletrendszer második egyenletének bal oldalát szorzattá alakítjuk:

(3) $$xy\cdot(x-y)=84.$$

Az első egyenletből kivonjuk a második egyenlet háromszorosát, így a következő teljes köböt alakítjuk ki:

$$(x-y)^3=64.$$ 2 pont

Ez pontosan akkor teljesül, ha

(4) $$x-y=4.$$ 1 pont

A (4) összefüggést behelyettesítjük a (3) egyenletbe. Rendezés után az

(5) $$xy = 21$$

egyenletet kapjuk. 1 pont

A (4) és (5) egyenletből álló egyenletrendszer megoldásai az $x_1 = -3, y_1 = -7$ és $x_2 = 7, y_2 = 3$ számpárok. 2 pont

Számolással ellenőrizhető, hogy mindkét számpár megoldása az eredeti egyenletrendszernek. 1 pont

Összesen: 10 pont

Második megoldás:

Az első egyenletben felhasználjuk, hogy $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$. Az egyenletek bal oldalán egyik tényező sem lehet zérus. A két egyenlet megfelelő oldalainak hányadosát képezve adódik, hogy

$$\frac{(x-y)(x+y)^2}{(x-y)(x^2+y^2)} = \frac{400}{232}.$$ 2 pont

Egyszerűsítés és a zárójelek felbontása után:

$$\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2+y^2} = \frac{50}{29}.$$ 2 pont

Rendezés után a $21x^2 - 58xy + 21y^2 = 0$ szimmetrikus egyenletet kapjuk, amelynek bal oldalát szorzatalakban írjuk fel: $(7x-3y)(3x-7y) = 0$. 1 pont

A fenti szorzat pontosan akkor nulla, ha legalább az egyik tényezője nulla, így $y = \frac{7}{3}x$ vagy $y = \frac{3}{7}x$ adódik. 2 pont

Visszahelyettesítünk az eredeti egyenletrendszer első egyenletébe.

$y = \frac{7}{3}x$ esetén $\left(x + \frac{7}{3}x\right)\left(x^2 - \left(\frac{7}{3}x\right)^2\right) = 400$ adódik, amelyből $x = -3$ és $y = -7$. 1 pont

$y = \frac{3}{7}x$ esetén $\left(x + \frac{3}{7}x\right)\left(x^2 - \left(\frac{3}{7}x\right)^2\right) = 400$ adódik, amelyből $x = 7$ és $y = 3$. 1 pont

Számolással ellenőrizhető, hogy mindkét számpár megoldása az eredeti egyenletrendszernek. 1 pont

Összesen: 10 pont

2. Legyen $f(x)$ a természetes számok halmazán értelmezett olyan függvény, amely eleget tesz az $f(x)+f(f(x))=12x+40$ egyenletnek, és $f(21)=71$. Feltéve, hogy a megadott tulajdonságokkal rendelkező függvény létezik, van-e olyan $x\in\mathbb{N}$ szám, amelyre $f(x)=2021$? (Válaszát számítással indokolja.)

Első megoldás:

Ha $x=21$, akkor $f(21)=71$ és $f(f(21))=f(71)$. 1 pont

Behelyettesítjük a fentieket a megadott függvényegyenletbe:
$71+f(71)=12\cdot 21+40$, amelyből átrendezés után $f(71)=221$ adódik. 2 pont

Ha $x=71$, akkor $f(71)=221$ és $f(f(71))=f(221)$. 1 pont

$221+f(221)=12\cdot 71+40$, amelyből átrendezés után $f(221)=671$. 2 pont

Ha $x=221$, akkor $f(221)=671$ és $f(f(221))=f(671)$. 1 pont

$671+f(671)=12\cdot 221+40$, amelyből átrendezés után $f(671)=2021$-et kapunk. 2 pont

Tehát létezik olyan természetes szám, amelyre $f(x)=2021$, mégpedig $x=671$. 1 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzés: Igazolható, hogy $x=671$ az egyetlen ilyen természetes szám, amelyre $f(x)=2021$.

Második megoldás:

Keressünk a feltételeknek megfelelő függvényt a lineáris függvények körében, tehát legyen $f(x)=ax+b$ alakú (a és b valós számok). 2 pont

Behelyettesítjük a fenti kifejezést a megadott függvényegyenletbe:
$ax+b+a(ax+b)+b=12x+40$, amelyből a zárójel felbontása, összevonás és kiemelés után $(a^2+a)x+ab+2b=12x+40$ adódik. 1 pont

Az elsőfokú tag együtthatóját tekintve $a^2+a=12$ másodfokú egyenletet kapjuk. 1 pont

Ennek megoldásai $a_1=-4$ és $a_2=3$. 1 pont

A konstans tagot vizsgálva $ab+2b=40$ egyenlethez jutunk. 1 pont

Behelyettesítjük a kapott a_1 és a_2 értékeket a fenti egyenletbe.

$a_1=-4$ esetén $b_1=-20$, amelyből $f(x)=-4x-20$. Megvizsgálva $f(21)$ értékét $f(21)=-4\cdot 21-20=-104\neq 71$, tehát ez a függvény nem megfelelő. 1 pont

$a_2 = 3$ esetén $b_2 = 8$, amelyből $f(x) = 3x + 8$. Megvizsgálva $f(21)$ értékét $f(21) = 3 \cdot 21 + 8 = 71$, tehát ez a függvény kielégíti mindkét feltételt. 1 pont

Keressük x azon természetes számot, amelyre $f(x) = 2021$, vagyis $3x + 8 = 2021$.

Az egyenlet megoldása $x = 671$. 1 pont

Tehát létezik olyan természetes szám, amelyre $f(x) = 2021$, mégpedig $x = 671$. 1 pont

Összesen: 10 pont

3. Egy valós számokból álló számsorozat bármely két egymást követő tagjára teljesül, hogy $\frac{a_n + a_{n+1}}{2} = n + 1$ $\left(n \in \mathbb{N}^+\right)$ és $a_{221} = 2021$. Határozza meg a sorozat első 2021 tagjának összegét.

Első megoldás:

Képezzük a b_n számtani sorozatot az a_n számsorozat két egymást követő tagjának összegeiből:

$$b_n = a_n + a_{n+1} = 2 \cdot (n+1).$$ 2 pont

Először összeadjuk az eredeti sorozat első 220 tagját, a b_n sorozat első 110 páratlan indexű tagjának összegeként.

A számsorozat első két tagjának összege $b_1 = a_1 + a_2 = 2 \cdot 2 = 4$.

Az utolsó két tag összege $b_{219} = a_{219} + a_{220} = 2 \cdot 220 = 440$. 1 pont

$S_{220} = (a_1 + a_2) + \ldots + (a_{219} + a_{220}) = b_1 + b_3 + \ldots + b_{219} = \frac{4 + 440}{2} \cdot 110 = 24420$. 2 pont

Az a_n sorozat 221. tagja a 2021.

A megmaradt 1800 tag összegét az első 220 tag összegéhez hasonlóan számoljuk ki. Felírjuk az eredeti sorozat 222. tagjával kezdődő részsorozat első 1800 tagjának összegét a b_n számtani sorozat segítségével: 1 pont

A részsorozat első két tagjának összege $b_{222} = a_{222} + a_{223} = 2 \cdot 223 = 446$.

Az utolsó két tag összege $b_{2020} = a_{2020} + a_{2021} = 2 \cdot 2021 = 4042$. 1 pont

$S_{1800} = (a_{222} + a_{223}) + \ldots + (a_{2020} + a_{2021}) = b_{222} + b_{224} + \ldots + b_{2020} = \frac{446 + 4042}{2} \cdot 900 =$ 2 pont

$= 2019600$.

Tehát a sorozat első 2021 tagjának összege $24420 + 2021 + 2019600 = 2046041$. 1 pont

Összesen: 10 pont

Második megoldás:

A számsorozat két egymást követő tagjának összege $a_n + a_{n+1} = 2 \cdot (n+1)$.

A sorozat 221. tagja $a_{221} = 2021$, a 221. és a 222. tag összege $a_{221} + a_{222} = 2 \cdot 222 = 444$. 1 pont

A sorozat 222. tagja $a_{222} = 444 - 2021 = -1577$. 1 pont

Hasonló módon kiszámolható, hogy $a_{223} = 2023$, $a_{224} = -1575$.

A kiszámolt értékekből arra a sejtésre juthatunk, hogy a sorozat páratlan és páros indexű tagjai egy-egy 2 differenciájú számtani sorozatot alkotnak. Ez valóban így van, hiszen $(a_{2k} + a_{2k+1}) - (a_{2k-1} - a_{2k}) = a_{2k+1} - a_{2k-1} = (4k+2) - 4k = 2$, illetve. $(a_{2k+1} + a_{2k+2}) - (a_{2k} - a_{2k+1}) = a_{2k+2} - a_{2k} = (4k+4) - (4k+2) = 2$. 3 pont

A sorozat első tagja $a_1 = a_{221} - 110 \cdot d = 2021 - 220 = 1801$, így a páratlan sorszámú tagok összege $S_{pt} = \frac{2 \cdot 1801 + 1010 \cdot 2}{2} \cdot 1011 = 2841921$. 2 pont

A sorozat második tagja $a_2 = a_{222} - 110 \cdot d = -1577 - 220 = -1797$, így a páros sorszámú tagok összege $S_{ps} = \frac{2 \cdot (-1797) + 1009 \cdot 2}{2} \cdot 1010 = -795880$. 2 pont

Tehát a sorozat első 2021 tagjának összege $S_{pt} + S_{ps} = 2841921 + (-795880) = 2046041$. <u>1 pont</u>

Összesen: 10 pont

4. Egy baráti társaság e-maileken keresztül tartja a kapcsolatot egymással. Mindenkinek pontosan másik három társának az e-mailcíme van meg, és ez kölcsönös. Tudjuk, hogy bármelyik két ember közvetlenül tud egymásnak levelet küldeni, vagy létezik a társaságból olyan harmadik személy, akin keresztül tudnak levelet váltani. Sorolja fel a társaság létszámának lehetséges értékeit és szemléltesse az egyes eseteket egy-egy gráffal.

Megoldás:

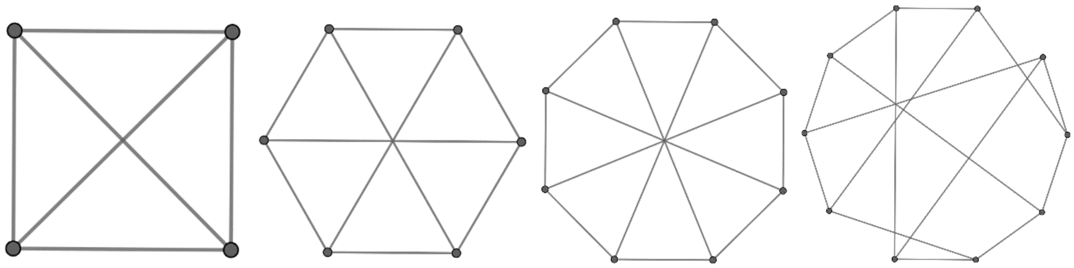
A társaság tagjai legyenek a kívánt gráf csúcsai, és a kölcsönös kapcsolatok pedig legyenek a gráf élei. Ekkor minden csúcs fokszáma 3.

Egy n tagú társaság esetén a csúcsok fokszámának összege $3 \cdot n$, ami az élek számának kétszerese, emiatt a társaság létszáma csak 3-nál nagyobb páros szám lehet. 2 pont

Egy ember a társaságban pontosan 3 főnek tud közvetlenül levelet küldeni, és ők mindhárman további két-két főnek továbbíthatnak levelet. Ebből következően maximum $1 + 3 + 3 \cdot 2 = 10$ főből állhat a baráti társaság. 2 pont

A társaság létszámának lehetséges értékei 4, 6, 8, 10. 1 pont

Gráfokkal szemléltetjük az egyes eseteket:



Tehát a társaság létszámának lehetséges értékei 4, 6, 8, 10, és ezek mind meg is valósulhatnak. 5 pont

Összesen: 10 pont

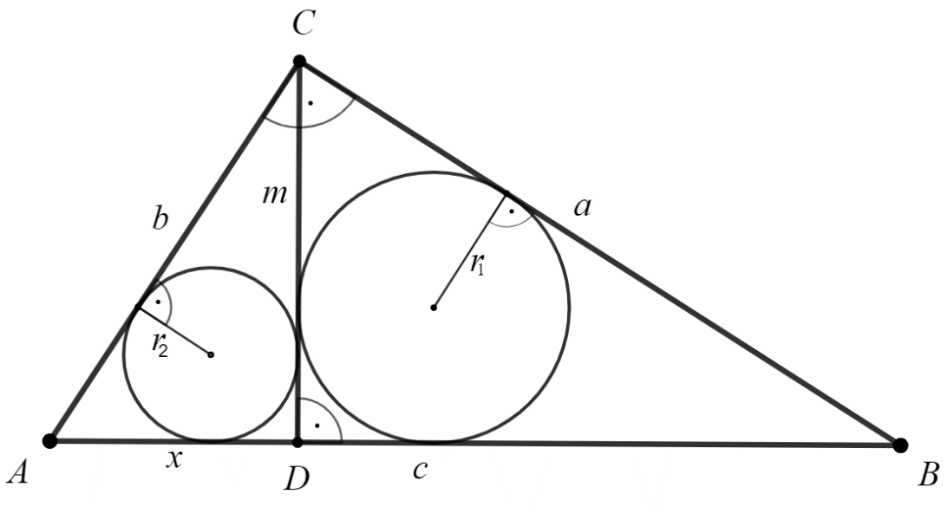
5. Legyen az ABC derékszögű háromszög $AB=c$ átfogójához tartozó magasságának talppontja D, a BCD és ADC háromszögekbe írható körök sugara rendre r_1 és r_2, továbbá az ABC háromszög területe T. Bizonyítsa be, hogy

$$r_1+r_2+\sqrt{2T}\le c\,.$$

Mekkorák a hegyesszögei annak a háromszögnek, amelyben az egyenlőség áll fenn?

Megoldás:

Ábrát készítünk a feladathoz.



Jelöljük az ABC derékszögű háromszög átfogójához tartozó magasságot m-mel, az AC befogó átfogóra eső merőleges vetületét x-szel, a BC befogót a-val és az AC befogót b-vel. 1 pont

Az ADB és a BDC derékszögű háromszögekben a beírható kör sugarát (r_1 és r_2) kifejezzük a háromszögek oldalainak segítségével:

$r_1 = \dfrac{m+(c-x)-a}{2}$ és $r_2 = \dfrac{m+x-b}{2}$. 2 pont

Az ABC derékszögű háromszög területét felírjuk a befogók segítségével: $T = \dfrac{ab}{2}$.

A fenti összefüggéseket használjuk fel a bizonyítandó egyenlőtlenség bal oldalán:

$r_1 + r_2 + \sqrt{2T} = \dfrac{m+c-x-a}{2} + \dfrac{m+x-b}{2} + \sqrt{ab} = m + \dfrac{c-a-b}{2} + \sqrt{ab}$. 1 pont

Alkalmazzuk a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget az a és b befogókra, $m + \dfrac{c-a-b}{2} + \sqrt{ab} \le m + \dfrac{c-a-b}{2} + \dfrac{a+b}{2} = m + \dfrac{c}{2}$ 2 pont

Az ABC derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó m magasság legfeljebb az átfogó felével egyenlő, emiatt $m + \dfrac{c}{2} \le \dfrac{c}{2} + \dfrac{c}{2} = c$. Ezzel az állítást bizonyítottuk. 2 pont

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha a háromszög egyenlő szárú, hiszen ekkor egyrészt a $\sqrt{ab} = \dfrac{a+b}{2}$, és $m = \dfrac{c}{2}$.

Ennek a háromszögnek a hegyesszögei tehát 45° -osak. 2 pont

Összesen: 10 pont