

OKTATÁSI HIVATAL

**2021/2022. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
első forduló**

**MATEMATIKA I. KATEGÓRIA
(szakgimnázium, technikum)
Javítási-értékelési útmutató**

1. Egy 37 fős osztály dolgozatot írt. Bárhogyan is választunk ki az osztályból 7 diákot, mindig lesz a kiválasztottak között legalább 2 olyan tanuló, akinek azonos lett a dolgozatra kapott pontszáma. Bizonyítsa be, hogy van az osztályban legalább 4 fiú vagy 4 lány, akinek azonos lett a pontszáma.

Megoldás:

A dolgozatok pontszámai között legfeljebb 6-féle érték szerepelhet, különben a skatulyaelv szerint ki tudnánk választani 7 olyan diákot, akik különböző pontszámot kaptak a dolgozatukra. 4 pont

A 37 dolgozat között a skatulya elv alapján biztosan van legalább 7 olyan, amelynek egyforma a pontszáma. Ha ugyanis ha 6 egyforma dolgozat lenne mind a 6 különböző pontszámúból, akkor az csak $6 \cdot 6 = 36$ dolgozatot eredményezne. 3 pont

A 7 azonos pontszámú dolgozat írói között biztosan van vagy legalább 4 fiú vagy legalább 4 lány, különben legfeljebb 3 fiúnak és legfeljebb 3 lánynak csak legfeljebb 6 dolgozata lenne. 3 pont

Összesen: 10 pont

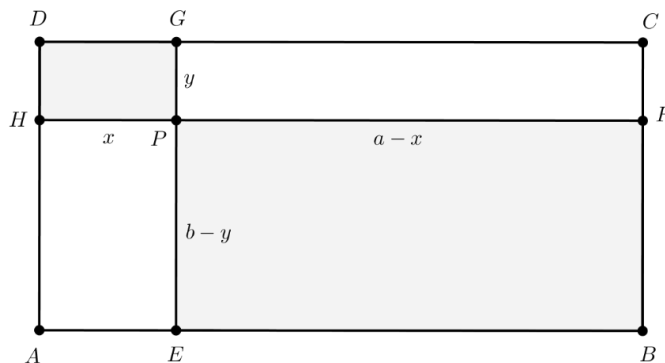
Az Országos Középiskolai Tanulmányi versenyek megvalósulását az NTP-TMV-M-21-A0002 projekt támogatja



2. Az $ABCD$ téglalapot egyik belső P pontján keresztül az oldalakkal párhuzamos egyenesekkel négy téglalagra osztottuk fel. Az így kapott téglalapok oldalhosszai egész számok. Közülük kiválasztható két olyan téglalap, amelyeknek egyetlen közös csúcsa P , és a téglalapok területe 11 és 47 területegység. Mekkora annak az egész oldalhosszúságú négyzetnek az oldala, amelyik ugyanakkora területű, mint az $ABCD$ téglalap?

Megoldás:

Legyen az $ABCD$ téglalap oldalainak hossza $AB = CD = a$, illetve $BC = DA = b$, és tekintsük a P belső pont segítségével a feltételeknek megfelelően létrehozott $AEPH$, $EBFP$, $FCGP$ és $GDHP$ téglalapokat.



A négy téglalap közül nyilván 2-2 felel meg annak a feltételnek, hogy egyetlen közös csúcsuk a P pont. Nem sérti az általánosságot, ha ennek a feltételnek megfelelő, 11 illetve 47 egységnyi területű téglalapnak rendre a $GDHP$ illetve az $EBFP$ téglalapokat választjuk.

1 pont

Az ábra jelöléseivel ezen téglalapok területe:

$$T_{GDHP} = x \cdot y \text{ és } T_{EBFP} = (a - x) \cdot (b - y),$$

ahol feltételek szerint az x , y , $a - x$, $b - y$ pozitív egész számok. Nyilvánvaló, hogy ekkor az a és b számok is pozitív egészek.

2 pont

Keressük tehát az

$$\begin{cases} x \cdot y = 11 \\ (a - x)(b - y) = 47 \end{cases}$$

egyenletrendszer pozitív egészekből álló megoldásait.

A 11 és a 47 prímszámok, amelyek csak $11 = 1 \cdot 11$, illetve $47 = 1 \cdot 47$ alakban bonthatók fel pozitív egész számok szorzatára.

1 pont

Két különböző eset fordulhat elő a P csúcsban találkozó két-két szemben fekvő szakaszra nézve: két 1 egységnyi szakasz találkozik, és akkor a másik két szakasz hossza 11, illetve 47, vagy pedig a két szemben fekvő szakasz közül az egyik hossza 1, a másiké 47, és a fennmaradó két szakasz hossza 11, illetve 1.

1 pont

Első eset: $x = a - x = 1$ és akkor $y = 11$, illetve $b - y = 47$.

Második eset: $x = 1$ és $a - x = 47$, ekkor $y = 11$ illetve $b - y = 1$.

2 pont

Az első esetben $a = 2$ és $b = 58$ értékeket kapjuk, ekkor az $ABCD$ téglalap területe $T_{ABCD} = a \cdot b = 116$, ez azonban nem négyzetszám, így nem lehet egyenlő egy egész oldalhosszúságú négyzet területével.

1 pont

A második esetben $a=48$ és $b=12$, így az $ABCD$ téglalap területe $T_{ABCD} = a \cdot b = 576 = 24^2$, eszerint a téglalap területe egy 24 oldalú négyzet területével egyenlő. 1 pont

Ezek alapján az $ABCD$ téglalap területére $T_{ABCD} = 24^2$ teljesül, a téglalap területe tehát egy 24 egység oldalhosszúságú négyzet területével egyenlő. 1 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzés: Ugyanez a megoldás adódik, ha az $y = b - y = 1$, vagy ha az $y = 1$ és $b - y = 47$ számokat választjuk.

3. Ádám összeszorozott két tízes számrendszerben felírt pozitív kétjegyű számot, és észrevette, hogy ha egymás után írta volna őket, akkor a szorzat kétszeresét kapta volna. Melyik két számot szorozta össze Ádám?

Megoldás:

Jelöljük az egyik kétjegyű számot x -szel, a másikat pedig y -nal. Ekkor a két szám szorzata $x \cdot y$, és ha egymás után írjuk őket, akkor a $100x + y$ négyjegyű számot kapjuk. (A $100y + x$ esettől a szimmetria miatt eltekinthetünk.) 1 pont

A feltétel alapján felírhatjuk a következő egyenletet:

$$2xy = 100x + y. \quad \text{2 pont}$$

Rendezés és kiemelés után kapjuk, hogy

$$2x(y - 50) - y = 0.$$

Az egyenlet mindkét oldalához 50-et hozzáadva a bal oldalon szorzatot képezünk:

$$(2x - 1)(y - 50) = 50. \quad \text{*3 pont}$$

Mivel x és y is pozitív kétjegyű szám, ezért $2x - 1 > 18$ (és $y - 50 < 50$).

Az 50 kéttényezős szorzattá való felbontásában a $2x - 1$ tényező csak a 25 lehet, hiszen ez az egyetlen 18-nál nagyobb páratlan osztója az 50-nek. **2 pont

Ekkor az $y - 50 = 2$, tehát $x = 13$ és $y = 52$. 1 pont

Tehát a 13 és az 52 a két összeszorozott szám, mert $13 \cdot 52 = 676$ és $2 \cdot 13 \cdot 52 = 1352$. 1 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzések:

- 1) A *-gal jelölt 3 pontot kapja meg a versenyző, ha az egyenletet $y = 50 + \frac{50}{2x - 1}$ alakra hozza.
- 2) A **-gal jelölt 2 pontot kapja meg a versenyző, ha az 50 pozitív osztópárjaiból más, helyes indoklással kizárja a rossz megoldásokat.

4. Határozza meg a p valós paraméter értékét, ha tudjuk, hogy a $p \cdot 10^x + 10^{-x} = 10$ egyenletnek csak egyetlen valós megoldása van.

Megoldás:

Alakítsuk át az egyenletet a negatív hatványkitevő definíciójának alkalmazásával, így adódik, hogy

$$p \cdot 10^x + \frac{1}{10^x} = 10.$$

Vezessünk be új változót, legyen $a = 10^x$, ahol $a > 0$.

1 pont

Ekkor a

$$p \cdot a + \frac{1}{a} = 10$$

1 pont

egyenlethez jutunk, amelyből a -val való szorzás és rendezés után az

$$(1) \quad p \cdot a^2 - 10a + 1 = 0, \quad (a > 0)$$

egyenletet kapjuk.

Három esetet vizsgálunk.

Első eset: Amennyiben $p = 0$, akkor az (1) egyenlet megoldása $a = \frac{1}{10}$, vagyis

$$10^x = \frac{1}{10}.$$

Ekkor a 10^x függvény kölcsönös egyértelmősége miatt egyetlen megoldása van az egyenletnek, mégpedig $x = -1$.

*2 pont

Második eset: Ha $p \neq 0$, akkor az (1) egyenlet másodfokú.

A másodfokú egyenlet diszkriminánsát vizsgálva $D < 0$ esetén nincs megoldása az egyenletnek.

$D = 0$ és $a > 0$ esetén pontosan egy megoldása van az (1) egyenletnek.

$D = 100 - 4p = 0$, amelyből $p = 25$.

Ezt behelyettesítve az (1) egyenletbe $25a^2 - 10a + 1 = 0$, amelynek a megoldása $a = \frac{1}{5}$, amely pozitív, vagyis $10^x = \frac{1}{5}$.

Ekkor a logaritmus definíciója miatt egyetlen megoldása van az egyenletnek, mégpedig $x = \lg \frac{1}{5} \approx -0,699$.

*2 pont

Harmadik eset: A másodfokú egyenlet diszkriminánsát tovább vizsgálva $D > 0$ esetén pontosan akkor van egy megoldása az (1) egyenletnek, ha a gyökei közül pontosan az egyik pozitív.

$D = 100 - 4p > 0$, amelyből $p < 25$.

1 pont

A Viète-formula alapján pontosan akkor lesz egy pozitív megoldása az (1) egyenletnek, ha a gyökök szorzata negatív. A gyökök szorzata nem lehet zérus, mert a 0 nem megoldása az (1) egyenletnek.

Tehát $a_1 \cdot a_2 = \frac{1}{p} < 0$, amely pontosan akkor teljesül, ha $p < 0$. **2 pont

Összegezve az egyenletnek akkor van egyetlen megoldása, ha $p \leq 0$ vagy $p = 25$. 1 pont

Összesen: 10 pont

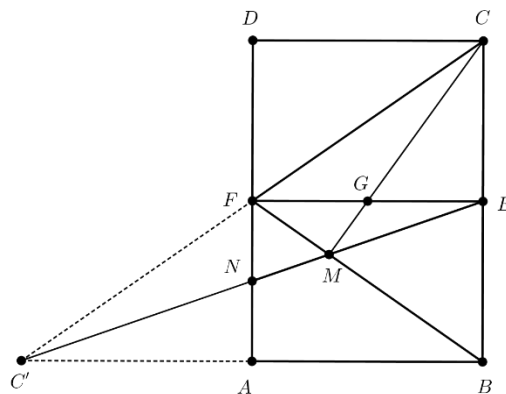
Megjegyzések:

- 1) A *-gal jelölt pontokat akkor is megkapja a versenyző, ha az egyenlet megoldásait nem adja meg, de helyesen bizonyítja, hogy csak egy megoldás van.
- 2) A **-gal jelölt 2 pontot kapja meg a versenyző, ha a megoldóképletből helyes indoklással írja le a megoldást.

5. Az $ABCD$ téglalap BC és DA oldalainak felezőpontja rendre E , illetve F , az FA szakasz felezőpontja N , a BF és EN szakaszok metszéspontja M . Milyen arányban osztja a CM egyenes az EF szakaszt?

Első megoldás:

Tekintsük az alábbi ábrát. Tükrözzük a C pontot az F pontra, a tükörkép az AB oldal egyenesének C' pontja. Kössük össze ezt a C' pontot E -vel. 2 pont



Ekkor nyilvánvaló, hogy a $CC'B$ háromszögben BF és $C'E$ súlyvonalak. 2 pont

A $C'E$ súlyvonal felezi a $CC'B$ háromszög BC -vel párhuzamos AF középvonalát, ami azt jelenti, hogy $C'E$ áthalad az N ponton is, ezért a C', N, M, E pontok egy egyenesre esnek. *2 pont

Eszerint egyrészt a $CC'B$ háromszög súlypontja M pont, másrészt a háromszög harmadik súlyvonala CA , hiszen A felezi BC' szakaszt. 2 pont

A CA súlyvonal áthalad az M súlyponton, és felezi a háromszög BC' -vel párhuzamos EF középvonalát, vagyis G az EF szakasz felezőpontja, és ezért

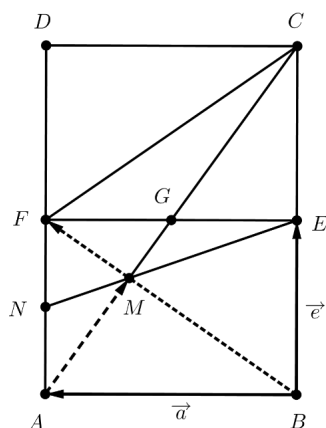
$$\frac{EG}{FG} = \frac{1}{1}. \quad \text{2 pont}$$

Összesen: 10 pont

Megjegyzés: Ha a versenyző nem bizonyítja, hogy a C', N, M, E pontok egy egyenesen vannak akkor a *-gal jelölt 2 pontból legfeljebb 1 pontot kaphat.

Harmadik megoldás:

Vezessük be a következő vektorjelöléseket: $\overline{BA} = \vec{a}$, $\overline{BE} = \vec{e}$.



Belátjuk, hogy az FNM és BEM háromszögek hasonlóak. Az FN és BE szakaszok párhuzamossága miatt $FNM \sphericalangle$ és $BEM \sphericalangle$, illetve $NFM \sphericalangle$ és $EBM \sphericalangle$ váltószögek, tehát $FNM \sphericalangle = BEM \sphericalangle$, illetve $NFM \sphericalangle = EBM \sphericalangle$. Ugyanakkor teljesül $FMN \sphericalangle = BME \sphericalangle$ is, mert csúcsszögek. 1 pont

A megfelelő szögek egyenlősége miatt az FNM és BEM háromszögek hasonlóak, és mivel N felezi a BE -vel azonos hosszúságú FA oldalt, ezért a hasonlóság aránya $\frac{FN}{BE} = \frac{NM}{EM} = \frac{FM}{BM} = \frac{1}{2}$. 1 pont

Választott jelöléseinkkel egyrészt $\overline{BC} = 2\vec{e}$, valamint $\overline{BF} = \vec{a} + \vec{e}$, és az $\frac{FM}{BM} = \frac{1}{2}$ arány miatt

$$(1) \quad \overline{BM} = \frac{2}{3}\overline{BF} = \frac{2}{3}(\vec{a} + \vec{e}). \quad \text{2 pont}$$

Tudjuk, hogy $\overline{AM} = \overline{BM} - \overline{BA}$, ezért az (1) vektoregyenlet szerint $\overline{AM} = \frac{2}{3}(\vec{a} + \vec{e}) - \vec{a}$, azaz

$$(2) \quad \overline{AM} = \frac{2}{3}\vec{e} - \frac{1}{3}\vec{a}. \quad \text{2 pont}$$

Világos továbbá, hogy $\overline{BC} - \overline{BA} = \overline{AC}$, vagyis

$$(3) \quad \overline{AC} = 2\vec{e} - \vec{a}. \quad \text{1 pont}$$

A (2) és (3) vektoregyenletek szerint az \overline{AM} és \overline{AC} vektorok egyirányúak, amely csakis úgy lehetséges, ha az A, M és C pontok egy egyenesen vannak, és nyilvánvaló, hogy erre az egyenesre illeszkedik a G pont is. 2 pont

Ez esetben az ABC háromszögben EG középvonal, ami azt is jelenti, hogy $EG = \frac{BA}{2}$, és mivel $EF = BA$, ezért $EG = \frac{EF}{2}$. Eszerint tehát G felezi az EF

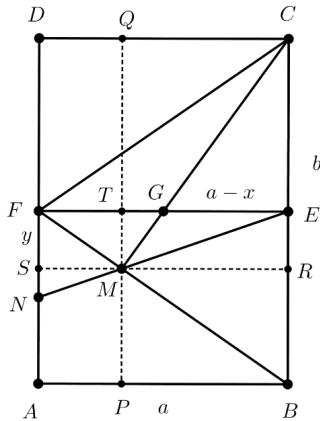
szakaszt, és így $\frac{EG}{FG} = \frac{1}{1}$. 1 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzés: Az origót más pontban felvéve hasonlóképp igazolható, hogy az A, M, C pontok egy egyenesre illeszkednek.

Negyedik megoldás:

Legyen az $ABCD$ téglalap oldalainak hossza $AB = CD = a$ és $BC = DA = b$.



Tekintsük a következő ábrát, amelyen az M ponton keresztül párhuzamosokat húztunk a téglalap oldalával. A BC -vel párhuzamos egyenes az AB és CD oldalakat a P illetve Q pontokban, az AB -vel párhuzamos egyenes a BC és DA oldalakat az R illetve S pontokban, végül a téglalap EF középvonalát a PQ egyenes a T pontban metszi. Legyen továbbá $FG = x$, ezzel $EG = a - x$, illetve legyen $FS = y$.

2 pont

Az FNM és BEM háromszögek hasonlóak, mert az FN és BE szakaszok párhuzamossága miatt $FNM \sphericalangle$ és $BEM \sphericalangle$, illetve $NFM \sphericalangle$ és $EBM \sphericalangle$ váltószögek, tehát $FNM \sphericalangle = BEM \sphericalangle$, illetve $NFM \sphericalangle = EBM \sphericalangle$. Az $FMN \sphericalangle$ és $BME \sphericalangle$ pedig csúcsszögek, ezért egyenlők.

1 pont

Hasonló háromszögekben a megfelelő oldalak aránya egyenlő, és mivel N felezi a BE -vel azonos hosszúságú FA oldalt, ezért a hasonlóság aránya

$$\frac{FN}{BE} = \frac{NM}{EM} = \frac{FM}{BM} = \frac{1}{2}.$$

1 pont

Hasonló háromszögekben a megfelelő oldalakhoz tartozó magasságok aránya és a megfelelő oldalakból a magasságok által lemetezett megfelelő szakaszok aránya is megegyezik a hasonlóság arányával, így $\frac{SM}{RM} = \frac{1}{2}$, illetve $\frac{FS}{BR} = \frac{1}{2}$, amelyből

$$SM = FT = AP = \frac{a}{3} \text{ és } RM = ET = BP = \frac{2a}{3}, \text{ valamint } BR = 2y \text{ következnek.}$$

2 pont

Mivel $FS = MT = ER = y$ és $BR = 2y$, továbbá $ER + BR = 3y = \frac{b}{2}$, ezért $y = \frac{b}{6}$.

1 pont

Az MTG és MQC derékszögű háromszögekben az MT, MQ illetve MG, MC oldalak egy egyenesre esnek, illetve $TG \parallel QC$, tehát ez a két háromszög hasonló, a

megfelelő oldalak aránya $\frac{GT}{CQ} = \frac{MT}{MQ}$, ahonnan

$$(1) \quad \frac{x - \frac{a}{3}}{\frac{2a}{3}} = \frac{\frac{b}{6}}{\frac{b}{6} + \frac{b}{2}},$$

hiszen $GT = FG - FT = x - \frac{a}{3}$, $CQ = BP = \frac{2a}{3}$, illetve $MT = y = \frac{b}{6}$ és

$$MQ = MT + TQ = \frac{b}{6} + \frac{b}{2}.$$

2 pont

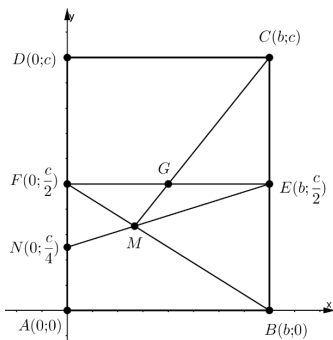
Az (1) egyenletből a műveletek elvégzésével, rendezéssel és egyszerűsítéssel azt kapjuk, hogy $x = \frac{3a}{6} = \frac{a}{2}$, ez pedig azt jelenti, hogy G felezőpontja az EF szakasznak, és ezért $\frac{EG}{FG} = \frac{1}{1}$.

1 pont

Összesen: 10 pont

Ötödik megoldás:

Helyezzük el az $ABCD$ téglalapot a derékszögű koordinátarendszerben úgy, hogy az A pont az origóban legyen, a B pont az x -tengelyre, a D pont az y -tengelyre illeszkedjen. Ekkor a feladatban megadott pontokat és azok koordinátáit a bal oldali ábrán szemléltetjük. A téglalap elhelyezése miatt nyilvánvaló, hogy a pontok koordinátaiban szereplő b és c számok pozitívak.



2 pont

Az NE egyenes meredekségére $m_{NE} = \frac{\frac{c}{2} - \frac{c}{4}}{b} = \frac{c}{4b}$, és

mivel az egyenes az y -tengelyt az $N\left(0; \frac{c}{4}\right)$ pontban metszi, ezért az NE egyenes egyenlete

$$(1) \quad y = \frac{c}{4b}x + \frac{c}{4}.$$

Az FB egyenes meredeksége $m_{FB} = \frac{0 - \frac{c}{2}}{b} = -\frac{c}{2b}$, az egyenes az y -tengelyt az

$F\left(0; \frac{c}{2}\right)$ pontban metszi, ezért az egyenes egyenlete

$$(2) \quad y = -\frac{c}{2b}x + \frac{c}{2}. \quad 2 \text{ pont}$$

Az (1) és (2) egyenletekből álló egyenletrendszer megoldásával $x = \frac{b}{3}$ és $y = \frac{c}{3}$,

ezért az NE és FB egyenesek M metszéspontjának koordinátái $M\left(\frac{b}{3}; \frac{c}{3}\right)$. 1 pont

Az MC egyenes egy irányvektorának koordinátái $\vec{v}_{MC} \left(b - \frac{b}{3}; c - \frac{c}{3}\right) = \left(\frac{2b}{3}; \frac{2c}{3}\right)$,

ahonnan az egyenes egy másik irányvektora $\vec{v}_{MC}(b; c)$. 1 pont

Az egyenes áthalad a $C(b;c)$ ponton, ezért MC egyenlete

$cx - by = c \cdot b - b \cdot c (= 0)$, ahonnan

(3)
$$y = \frac{c}{b}x.$$
 1 pont

A G pont az $y = \frac{c}{2}$ egyenletű EF egyenesre illeszkedik, ezért G koordinátáit úgy

kapjuk meg, ha megoldjuk az $y = \frac{c}{2}$ és a (3) egyenletekből álló egyenletrendszert.

Egyszerű számítással adódik, hogy $x = \frac{b}{2}$ és $y = \frac{c}{2}$, tehát $G\left(\frac{b}{2}; \frac{c}{2}\right)$. 2 pont

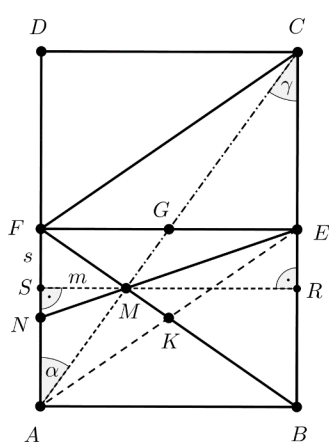
A G pont első koordinátája pontosan azt jelenti, hogy G felezi az EF szakaszt, és

így $\frac{EG}{FG} = \frac{1}{1}$. 1 pont

Összesen: 10 pont

Hatodik megoldás:

Szerkesszünk párhuzamost az AB oldallal az M ponton keresztül. Ez az egyenes a



BC oldalt az R , a DA oldalt az S pontban metszi, ezzel létrehoztuk az AMS és CMR derékszögű háromszögeket. A bal oldali ábrán $MS = m$, illetve $FS = s$, továbbá az AE és a BF szakaszok metszéspontja K . 1 pont

Az $ABEF$ téglalap szimmetriaközéppontja a K pont, ezért K felezi az AE szakaszt, N pedig felezi az AF szakaszt, tehát FK és EN az AEF háromszög súlyvonalai, és így M a háromszög súlypontja. 2 pont

A súlypont harmadolja a súlyvonalakat, ezért $EM = 2MN$, valamint $FM = 2MK$. A K pont nyilván felezi a BF szakaszt is, így az előző eredményünk alapján $BK = FK = 3MK$, ebből $BM = 4MK$ következik. 1 pont

Az FMS és BRM derékszögű háromszögekben $FMS\alpha = BMR\alpha$, mert csúcsszögek, ezért a két háromszög megfelelő szögei egyenlők, vagyis a háromszögek hasonlóak. Megfelelő oldalaik aránya az átfogók arányával megegyezik, ez pedig $\frac{FM}{BM} = \frac{FM}{4MK} = \frac{1}{2}$, hiszen $FM = 2MK$. Ebből azt kapjuk, hogy $MR = 2m$

és $BR = AS = 2s$, de akkor $RE = s$ miatt $BE = CE = 3s$, illetve $BC = 6s$. 2 pont

Bebizonyítjuk, hogy az A, M, C pontok egy egyenesen vannak.

Felírjuk az AMS és CMR derékszögű háromszögekben az α és γ hegyesszögek tangensét.

Eszerint $\operatorname{tg}\alpha = \frac{MS}{AS} = \frac{m}{2s}$, illetve $\operatorname{tg}\gamma = \frac{MR}{CR} = \frac{2m}{4s} = \frac{m}{2s}$.

Ez csakis úgy lehetséges, ha az α és γ hegyesszögek egyenlő nagyságúak. Ekkor viszont $AS \parallel CR$, valamint $\alpha = \gamma$ miatt szükségképpen $AM \parallel CM$, ez pedig azt jelenti, hogy az AM és CM szakaszok tartóegyenese azonos, tehát az A, M, C pontok valóban egy egyenesen vannak. *2 pont

Ebből azonnal következik, hogy az A, M, G pontok is egy egyenesre esnek, vagyis AG az AEF háromszög harmadik súlyvonala, és így G az EF szakasz felezőpontja. 1 pont

Ennek megfelelően $\frac{EG}{FG} = \frac{1}{1}$. 1 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzés: Ha ezt a megoldást választja a versenyző, de nem bizonyítja, hogy az A, M, C pontok egy egyenesen vannak, akkor a *2 pontot nem kapja meg.

6. Egy derékszögű háromszög oldalainak hossza növekvő sorrendben $p + q$, $3pq - 2$, $3pq - 1$. Adja meg a háromszög oldalainak hosszát, ha p és q pozitív prímszámok.

Megoldás:

A szimmetria miatt feltehetjük, hogy $p \leq q$.

A feltétel szerint a $3pq - 1$ a derékszögű háromszög átfogója, a $p + q$ és a $3pq - 2$ pedig a derékszögű háromszög befogóinak hossza. 1 pont

Felírjuk a Pitagorasz-tételt, amely alapján

$$(p + q)^2 + (3pq - 2)^2 = (3pq - 1)^2. \quad 1 \text{ pont}$$

A műveleteket elvégezve

$$p^2 + q^2 + 2pq + 9p^2q^2 - 12pq + 4 = 9p^2q^2 - 6pq + 1,$$

ahonnan rendezés után azt kapjuk, hogy

$$p^2 + q^2 + 3 = 4pq. \quad 2 \text{ pont}$$

Nyilvánvaló, hogy az egyenlet jobb oldalán páros pozitív egész szám áll, ezért a bal oldalnak is páros pozitív egésznek kell lennie.

A p és q prímekek nem lehetnek egyszerre párosak, vagy egyszerre páratlanok, mert akkor az egyenlet bal oldalán páratlan szám állna. Ez azt jelenti, hogy a p és q közül az egyik szám páros, a másik páratlan prím, és mivel $p \leq q$, ezért $p = 2$. 2 pont

Behelyettesítve $p = 2$ értékét, a $q^2 - 8q + 7 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk, amelynek két megoldása van: $q_1 = 1$ és $q_2 = 7$. 1 pont

Mivel $q_1 = 1$ nem prímszám, $q_2 = 7$ viszont prím, ezért csak $q_2 = 7$ a megoldás. 1 pont

Ekkor $p=2$ és $q=7$ miatt a derékszögű háromszög oldalainak hossza $p+q=9$, $3pq-2=40$, $3pq-1=41$ egységnyi hosszúságúak. Nyilván ugyanezeket a hosszúságokat kapnánk, ha a $p=7$ és $q=2$ értékeket választottuk volna. 1 pont

Számítással ellenőrizhetjük, hogy $9^2+40^2=41^2$, ezért a Pitagorasz-tétel megfordítása alapján a 9, 40, 41 számok valóban egy derékszögű háromszög oldalhosszai. 1 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzés: A feladat feltételei között szerepelt az, hogy a derékszögű háromszög, $p+q$, $3pq-2$, $3pq-1$ oldalait növekvő sorrendben adtuk meg, vagyis az átfogó hossza $3pq-1$. Ha nem tesszük fel, hogy $p+q$, $3pq-2$, $3pq-1$ növekvő sorrendben vannak felsorolva, a derékszögű háromszög átfogójának hossza akkor is csak $3pq-1$ lehet. Nyilvánvaló ugyanis, hogy $3pq-1 > 3pq-2$, másrészt $p+q < 3pq-1$ is teljesül, hiszen ebből ekvivalens átalakításokkal azt kapjuk, hogy $p+q+1 < 3pq$, illetve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{pq} < 3$.

Utóbbi egyenlőtlenség pedig egyszerűen belátható, mert $p \geq 2$ és $q \geq 2$ miatt

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{pq} \leq \frac{5}{4} < 3.$$