OKTATÁSI HIVATAL

A 2021/2022. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
döntő forduló

MATEMATIKA I. KATEGÓRIA

(szakgimnázium, technikum)

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

1. Hány olyan pozitív, tizenegyjegyű kettes számrendszerbeli szám van, amelyben nincs két egymás melletti 0 számjegy?

<u>Első megoldás:</u>

A kettes számrendszerbeli szám számjegyei a $\{0;1\}$ halmazból választhatók, és az első számjegye 1. 1 pont

Vizsgáljuk a számot a benne szereplő 0 számjegyek száma szerint.

(1) 1 db olyan szám van, amelyben nem szerepel 0 számjegy. 1 pont

(2) 10 db olyan szám van, amelyben 1 darab 0 számjegy szerepel, ez az első hely kivételével bármelyik helyiértéken állhat. 1 pont

(3) 36 db olyan szám van, amelyben 2 darab 0 számjegy szerepel a megadott feltételekkel. Ekkor ugyanis a 9 darab 1-es 8 „közt” határoz meg, a két 0 számjegy ebbe a 8 „köz”-be és az utolsó helyiértékre kerülhet, vagyis összesen 9 helyre. A 9 hely közül kell kettőt kiválasztani. Ez $\binom{9}{2}=36$ lehetőség. 2 pont

(4) Ha 3 darab 0 számjegy szerepel a megadott feltételekkel, akkor mivel nem kerülhetnek egymás mellé 0 számjegyek, és a 8 darab 1-es 7 „közt” határoz meg, a két 0 számjegy ebben a 7 „köz”-ben és az utolsó helyiértéken állhat. Az így kapott 8 hely közül kell hármat kiválasztani. Ez $\binom{8}{3}=56$ lehetőség. 1 pont

(5) Ha 4 darab 0 számjegy szerepel a 7 darab 1-es mellett, akkor az 1-esek 6 „közt” jelentenek, és egy 0 kerülhet az utolsó helyiértékre is. Így az előzőeknek megfelelően ez $\binom{7}{4}=35$ lehetőség. 1 pont

Az Országos Középiskolai Tanulmányi versenyek megvalósulását az NTP-TMV-M-21-A0002 projekt támogatja

Miniszterelnökség
Családokért Felelős Tárca Nélküli Miniszter

Nemzeti Tehetség Program

(6) Ha pedig 5 darab 0 számjegy szerepel a 6 darab 1-es mellett, akkor az 5 darab 0 számára ez az utolsó helyiértékkel együtt 6 lehetséges helyet ad. Ez összesen $\binom{6}{5}=6$ lehetőség. 1 pont

(7) Ha 5-nél több 0 számjegy van a számban, akkor biztosan lesz kettő, amelyik egymás mellé kerül, ez tehát a feltételek alapján nem lehetséges. 1 pont

Mivel a fentieken kívül más lehetőség nincs, ezért $1+10+36+56+35+6=144$ olyan pozitív tizenegyjegyű kettes számrendszerbeli szám van, amelyben nincs két egymás melletti 0 számjegy. 1 pont

Összesen: 10 pont

Második megoldás:

A kettes számrendszerbeli szám számjegyei a $\{0;1\}$ halmazból választhatók, és az első számjegye 1. 1 pont

A tizenegyjegyű számban a számjegyeket balról jobbra vizsgáljuk. Az első számjegy után, ami 1-es, kétféle számjegy állhat (0 vagy 1). A továbbiakban 0 számjegy csak 1-es után, 1-es számjegy pedig bármelyik számjegy után következhet. 1 pont

Legyen c_n a feltételeknek eleget tevő n-jegyű számok száma $(1 \le n \le 11)$.

Ekkor $c_1=1$, $c_2=2$. 1 pont

Ha $n>2$, akkor a megfelelő számokat két csoportba sorolhatjuk az utolsó számjegyük alapján. Ha az utolsó helyiértéken 1 áll, akkor a szám utolsó előtti számjegye 0 vagy 1 lehet, ezért az 1-re végződő n-jegyű számok száma megegyezik az $(n-1)$-jegyű, a feltételeknek megfelelő számok számával. Ebből adódóan 1-re végződő n-jegyű számból c_{n-1} darab van. 2 pont

Ha az n-jegyű szám utolsó helyiértékén 0 áll, akkor a szám utolsó előtti számjegye csak 1 lehet, azaz 10-re végződik. Ezért az ilyen típusú számok száma megegyezik az $(n-2)$-jegyű, a feltételeknek megfelelő számok számával. Ebből adódóan 0-ra végződő n-jegyű számból pontosan c_{n-2} darab van. 2 pont

A fenti gondolatmenetből következik, hogy ha $n>2$, akkor $c_n=c_{n-1}+c_{n-2}$. 2 pont

A fentiek alapján a sorozatot folytathatjuk: $c_3=c_2+c_1=2+1=3$.

Ugyanígy $c_4=c_3+c_2=3+2=5$, $c_5=8$, $c_6=13$, $c_7=21$, $c_8=34$, $c_9=55$, $c_{10}=89$.

Végül $c_{11}=144$, tehát 144 olyan pozitív tizenegyjegyű kettes számrendszerbeli szám van, amelyben nincs két egymás melletti 0 számjegy. 1 pont

Összesen: 10 pont

2. Adottak a derékszögű koordináta-rendszerben egy négyzet $A(0;0)$, $B(2;0)$, $C(2;2)$, $D(0;2)$ csúcsai.

   a. Határozza meg az $ABCD$ négyzet síkjában azokat a P pontokat, amelyekre
   $$PA^2 + PB^2 - PC^2 - PD^2 = 2022.$$

   b. Milyen határok között mozog a $\left|PA^2 + PB^2 - PC^2 - PD^2\right|$ kifejezés értéke, ha a P pont befutja az $ABCD$ négyzet körülírt körét? A négyzet körülírt körének mely P pontjai esetén veszi fel a $\left|PA^2 + PB^2 - PC^2 - PD^2\right|$ kifejezés a szélsőértékeit?

Megoldás:

a) Ha a sík P pontjának koordinátáira $P(x;y)$ teljesül, akkor
$$PA^2 = x^2 + y^2,$$
$$PB^2 = (x-2)^2 + y^2,$$
$$PC^2 = (x-2)^2 + (y-2)^2,$$
$$PD^2 = x^2 + (y-2)^2.$$
1 pont

A P pont akkor és csak akkor felel meg a feladat feltételének, ha
$$x^2 + y^2 + (x-2)^2 + y^2 - (x-2)^2 - (y-2)^2 - x^2 - (y-2)^2 = 2022.$$
A bal oldalon kijelölt műveletek elvégzése, valamint összevonás után azt kapjuk, hogy
$$8y = 2030,$$
$$y = \frac{2030}{8} = \frac{1015}{4}.$$
1 pont

A kapott egyenlet az x-tengellyel párhuzamos, az y-tengelyt a $\left(0;\frac{1015}{4}\right)$ koordinátájú pontban metsző egyenes egyenlete, ennek az egyenesnek bármely P pontja megfelel a $PA^2 + PB^2 - PC^2 - PD^2 = 2022$ feltételnek. 2 pont

b) Az a) feladat jelöléseit követve éppen az
$$\left|x^2 + y^2 + (x-2)^2 + y^2 - (x-2)^2 - (y-2)^2 - x^2 - (y-2)^2\right|$$
kifejezés értékkészletét keressük, miközben a $P(x;y)$ pont befutja az $ABCD$ négyzet körülírt körét. A műveletek elvégzése után a kifejezés a $|8y-8|$ alakot ölti. 1 pont

Az $ABCD$ négyzet köré írt kör középpontja $O(1;1)$, sugara $r=\sqrt{2}$, ezért a körvonal pontjainak második koordinátája az $\left[1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}\right]$ intervallumba esik. 1 pont

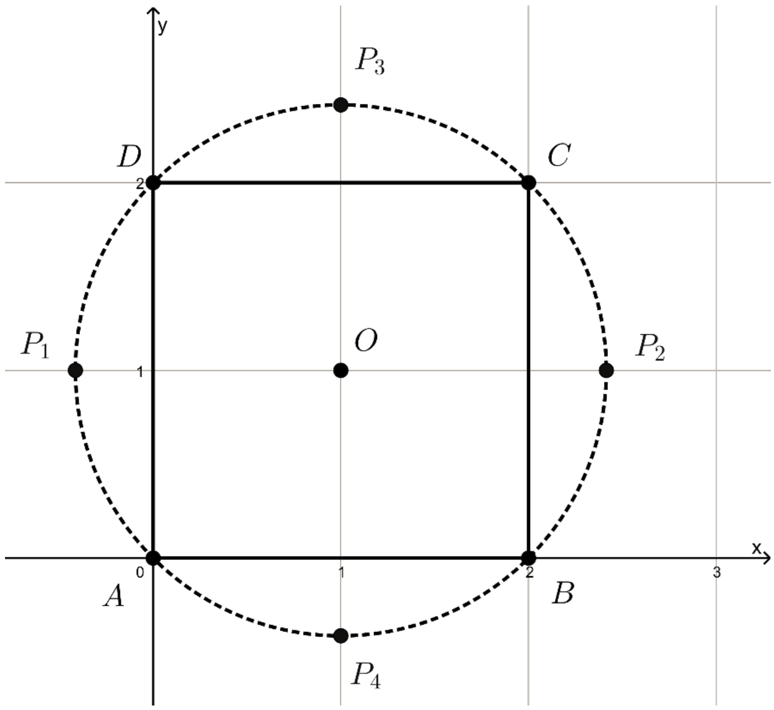
Az adott intervallumon az $|8y-8|$ kifejezés a minimumát az $y=1$ helyen veszi fel és a minimum értéke 0, maximumát pedig az $y_1=1+\sqrt{2}$, $y_2=1-\sqrt{2}$ helyeken éri el, és értéke $8\cdot\sqrt{2}$. 2 pont

A $\left|PA^2+PB^2-PC^2-PD^2\right|$ kifejezés értéke tehát a $\left[0;8\cdot\sqrt{2}\right]$ intervallumban mozog. Minimumát a körvonalnak azon pontjaiban veszi fel, amelyeknek második koordinátája 1, azaz a $P_1\left(1-\sqrt{2};1\right)$, $P_2\left(1+\sqrt{2};1\right)$ pontokban.

A kifejezés a maximumát pedig a körvonal azon a pontjaiban éri el, amelyeknek második koordinátája $1+\sqrt{2}$ vagy $1-\sqrt{2}$, azaz a $P_3\left(1;1+\sqrt{2}\right)$, $P_4\left(1;1-\sqrt{2}\right)$ pontokban. 2 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzés: Az alábbi ábrán megjelöltük az ABCD négyzet körülírt körén azokat a pontokat, amelyekre a $\left|PA^2+PB^2-PC^2-PD^2\right|$ kifejezés a fenti szélsőértékeket felveszi.



3. Legyenek a ; b ; c különböző, nem nulla valós számok, melyekre teljesül, hogy

$$a+\frac{2}{b}=b+\frac{2}{c}=c+\frac{2}{a}.$$

a. Ha $a=\sqrt{2}$, akkor határozza meg b és c pontos értékét.

b. Feltéve, hogy léteznek az a ; b ; c különböző, nem nulla valós számok, melyekre teljesül $a+\frac{2}{b}=b+\frac{2}{c}=c+\frac{2}{a}$, bizonyítsa be, hogy $a^2\cdot b^2\cdot c^2=8$.

Megoldás:

a) Ha $a=\sqrt{2}$, akkor a behelyettesítés után felírható a

$$(1)\qquad \sqrt{2}+\frac{2}{b}=b+\frac{2}{c}$$

$$(2)\qquad \sqrt{2}+\frac{2}{b}=c+\sqrt{2}$$

egyenletrendszer. 1 pont

A (2) egyenletből rendezés után adódik, hogy

$$\frac{2}{c}=b,$$

melyet az (1) egyenletbe helyettesítve

$$\sqrt{2}+\frac{2}{b}=2b$$

egyenlethez jutunk. 1 pont

Rendezés után a

$$2b^2-\sqrt{2}b-2=0$$

másodfokú egyenletet kapjuk, amelynek gyökei $b_1=\sqrt{2}$ és $b_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

A $b_1=\sqrt{2}$ nem megoldása a feladatnak, hiszen a ; b ; c különböző számok. 1 pont

A $b_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ megoldása a feladatnak, ekkor ugyanis $c=\frac{2}{b}=-2\sqrt{2}$.

Tehát ha $a=\sqrt{2}$, akkor $b=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ és $c=-2\sqrt{2}$. 1 pont

b) Alakítsuk át az egyenletrendszert a következőképp:

$$(1)\quad a+\frac{2}{b}=b+\frac{2}{c}$$

$$(2)\quad b+\frac{2}{c}=c+\frac{2}{a}.$$

$$(3)\quad c+\frac{2}{a}=a+\frac{2}{b}$$

Az egyenleteket 2-re rendezve a

$$(1)\quad b\cdot c\cdot\frac{a-b}{b-c}=2$$

$$(2)\quad c\cdot a\cdot\frac{b-c}{c-a}=2\,.$$

$$(3)\quad a\cdot b\cdot\frac{c-a}{a-b}=2$$

egyenletrendszert kapjuk. 3 pont

Mivel a; b; c különböző, nem nulla valós számok, ezért az (1), (2) és (3) egyenletek bal oldalán szereplő törtek számlálói és nevezői sem nullák. Így összeszorozva az egyenletek megfelelő oldalait az

$$a^2\cdot b^2\cdot c^2\,\frac{(a-b)\cdot(b-c)\cdot(c-a)}{(b-c)\cdot(c-a)\cdot(a-b)}=8$$

egyenlethez jutunk. 2 pont

Egyszerűsítés után a bizonyítandó állítást kapjuk, azaz valóban $a^2\cdot b^2\cdot c^2=8$. 1 pont

Összesen: 10 pont