



OKTATÁSI HIVATAL

A 2022/2023. tanévi  
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny  
első forduló

MATEMATIKA I. KATEGÓRIA  
(szakgimnázium, technikum)  
FELADATLAP

1. Bizonyítsa be, hogy a  $3^n - 2n^2 - 1$  kifejezés értéke minden pozitív egész  $n$  szám esetén osztható 8-cal.
2. Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$1 + \frac{1}{x} + (1+x)^2 = 8.$$

3. Frédi és Béni egy szabályos dobókockával játszik. Frédi dob, Béni pedig Frédi minden dobása után a kocka felső lapján lévő pöttyök mindegyike mellé rajzol még egy-egy pöttyöt. Mekkora a valószínűsége annak, hogy Frédi harmadik dobásának eredménye páratlan?
4. Legyen az  $ABCD$  négyzet  $AB$  oldalának felezőpontja  $F$ , a  $C$  csúcsból a  $DF$  szakaszra állított merőleges és a  $DF$  egyenes metszéspontja pedig  $P$ . Határozza meg az  $ABP$  háromszög és az  $ABCD$  négyzet területének arányát.
5. Legyen az  $f$  és a  $g$  függvény értelmezve a  $]0; 2022[$  intervallum nem egész pontjaiban.
  - a) Határozza meg az  $f$  függvény értékkészletét, ha

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x-1} + \frac{|x-2|}{x-2} + \frac{|x-3|}{x-3} + \dots + \frac{|x-2021|}{x-2021}.$$

- b) Határozza meg a  $g$  függvény értékkészletében lévő elemek összegét, ha  $g(x) = |f(x)|$ .
6. Egy  $n$  tagú társaságról ( $n \geq 3$ ) tudjuk, hogy bárhogyan is választunk ki közülük 3 embert, a kiválasztottak közül biztosan van 2 olyan ember, akik nem ismerik egymást, és ugyanabban a hármasban biztosan van 2 olyan ember is, akik ismerik egymást (az ismeretség kölcsönös). Hány tagja lehet a társaságnak?

Mindegyik feladat helyes megoldása 10 pontot ér.

Az Országos Középiskolai Tanulmányi versenyek megvalósulását az NTP-TMV-M-22-A0002 projekt támogatja

