OKTATÁSI HIVATAL

A 2024/2025. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
első forduló

MATEMATIKA I. KATEGÓRIA

(szakgimnázium, technikum)

Javítási-értékelési útmutató

1. Adja meg azt a legkisebb n természetes számot, amelyre az alábbi törtek mindegyike egész szám.

$$\frac{7n+9}{2};\quad \frac{7n+10}{3};\quad \frac{7n+11}{4};\quad \frac{7n+12}{5};\quad \frac{7n+13}{6}$$

<u>Első megoldás</u>:

A $\frac{7n+9}{2}$ tört értéke egész szám, ezért a nála 1-gyel kisebb szám, azaz a

$$\frac{7n+9}{2}-1=\frac{7n+7}{2}=\frac{7(n+1)}{2}$$

tört értéke is egész szám. 2 pont*

Mivel a 7 és a 2 relatív prímek, ezért a 2 osztója az $n + 1$-nek. 1 pont*

A $\frac{7n+10}{3}$ tört értéke szintén egész szám, ezért a nála 1-gyel kisebb szám, azaz a

$$\frac{7n+10}{3}-1=\frac{7n+7}{3}=\frac{7(n+1)}{3}$$

tört értéke is egész szám. 1 pont*

Mivel a 7 és a 3 relatív prímek, ezért a 3 is osztója az $n + 1$-nek. 1 pont*

Hasonló gondolatmenettel belátható, hogy a 4, az 5 és a 6 is osztója az $n + 1$-nek. 1 pont

Ekkor a 2, 3, 4, 5 és 6 legkisebb közös többszöröse, a 60 is osztója az $n + 1$-nek. 1 pont

Az $n + 1$ legkisebb lehetséges értéke ezért 60, 1 pont

amiből adódik, hogy az n legkisebb értéke 59. 1 pont

A feladat megoldása $n = 59$, mert ekkor mindegyik tört értéke egész szám. <u>1 pont</u>

Összesen: 10 pont

*Megjegyzés: A *-gal jelölt pontokat a versenyző az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja:*

Az Országos Középiskolai Tanulmányi Versenyek megvalósulását az NTP-TMV-M-24 projekt támogatja

Átalakítja a $\frac{7n+9}{2}$ *törtet:* $\frac{7n+9}{2}=\frac{6n+8}{2}+\frac{n+1}{2}=3n+4+\frac{n+1}{2}$, *2 pont*

majd ebből következtet arra, hogy a 2 *osztója az* n + 1*-nek.* *1 pont*

Átalakítja a $\frac{7n+10}{3}$ *törtet:* $\frac{7n+10}{3}=\frac{6n+9}{3}+\frac{n+1}{3}=2n+3+\frac{n+1}{3}$, *1 pont*

majd ebből következtet arra, hogy a 3 *is osztója az* n + 1*-nek.* *1 pont*

Második megoldás:

A $\frac{7n+13}{6}$ tört átalakítva

$$\frac{7n+13}{6}=\frac{6n+12}{6}+\frac{n+1}{6}=n+2+\frac{n+1}{6},$$ 2 pont

ami csak úgy lehet egész szám, ha a 6 osztója az n + 1-nek. 1 pont

A $\frac{7n+12}{5}$ tört átalakítva

$$\frac{7n+12}{5}=\frac{5n+10}{5}+\frac{2n+2}{5}=n+2+\frac{2(n+1)}{5}.$$ 1 pont

Mivel a 2 és az 5 relatív prímek, ezért az 5 is osztója az n + 1-nek. 1 pont

Ebből következik, hogy az n +1 osztható 30-cal. 2 pont

Tehát az n értéke 30-cal osztva 29-et ad maradékul. 1 pont

Növekvő sorrendben kipróbáljuk n lehetséges értékeit:

n = 29 nem megoldás, mert $\frac{7n+11}{4}=\frac{214}{4}$ nem egész szám. 1 pont

A feladat megoldása n = 59, mert ekkor mindegyik tört értéke egész szám. 1 pont

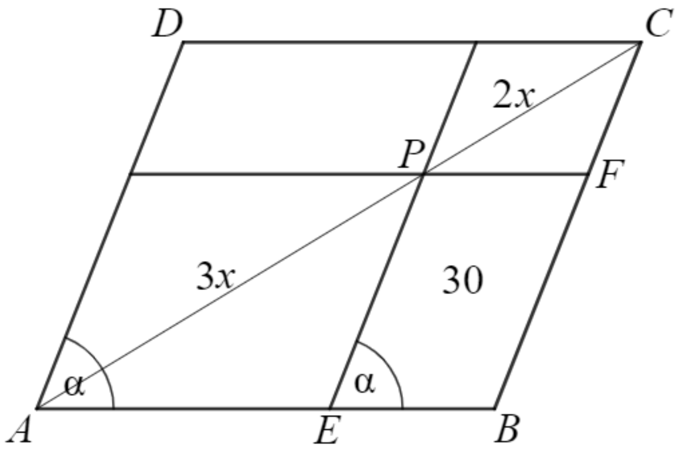
Összesen: 10 pont

Megjegyzés: A versenyző a maximális pontszámot akkor is megkaphatja, ha más maradékosztályokra szűkíti az esetvizsgálatot, vagy az összes szóba jöhető n-re megvizsgálta, hogy lehet-e megoldása a feladatnak.

2. Az $ABCD$ paralelogramma AC átlójának P pontjára teljesül, hogy $AP : AC = 3 : 5$. A P ponton át egy-egy párhuzamos egyenest húzunk a paralelogramma oldalaival, melyek az AB oldalt E-ben, a BC oldalt F-ben metszik. Az $EBFP$ négyszög területe 30 területegység. Számítsa ki az $ABCD$ paralelogramma területét.

Első megoldás:

Ábrát készítünk a feladat szövege alapján. Az $EBFP$ négyszög paralelogramma, mert szemközti oldalai párhuzamosak. 1 pont



Mivel $AP : AC = 3 : 5$, ezért létezik olyan x pozitív valós szám, amelyre

$$AP = 3x \text{ és } PC = 2x.$$ 1 pont

Az AEP és a PFC háromszögek megfelelő oldalai párhuzamosak egymással, ezért a két háromszög hasonló egymáshoz. 2 pont

Az AEP és a PFC háromszögek hasonlóságának aránya $\frac{AP}{PC} = \frac{3}{2}$, ezért

$$\frac{AE}{PF} = \frac{EP}{FC} = \frac{3}{2},$$ 1 pont

így léteznek olyan y és z pozitív valós számok, amelyekre

$$AE = 3y,\ PF = 2y \text{ és } EP = 3z,\ FC = 2z.$$ 1 pont

Ha az $ABCD$ paralelogramma A csúcsánál lévő szöget α jelöli, akkor $PEB\sphericalangle = \alpha$, és $EB = PF = 2y$ miatt az $EBFP$ paralelogramma területe

$$T_{EBFP} = EB \cdot EP \cdot \sin\alpha = 6yz \cdot \sin\alpha = 30,$$ 1 pont

amiből következik, hogy $yz \cdot \sin\alpha = 5$. 1 pont

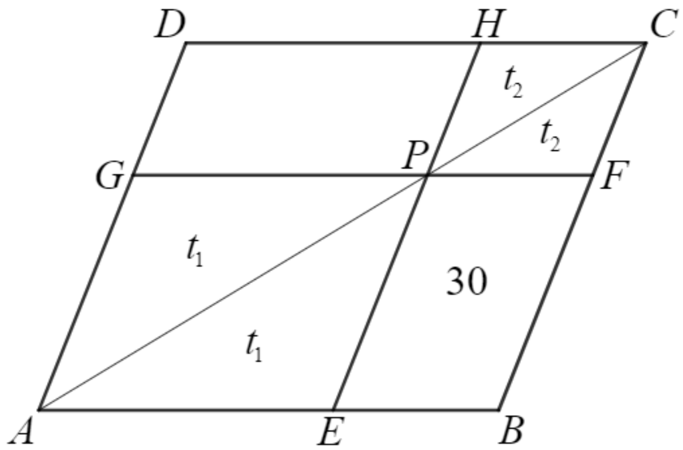
Az $ABCD$ paralelogramma területe így

$$T_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin\alpha = (5y) \cdot (5z) \cdot \sin\alpha = 25yz \cdot \sin\alpha = 25 \cdot 5 = 125.$$ 2 pont

Összesen: 10 pont

Második megoldás:

Ábrát készítünk a feladat szövege alapján. Az $EBFP$ négyszög paralelogramma, mert szemközti oldalai párhuzamosak. 1 pont



A kapott $AEPG$ és $PFCH$ négyszögek szintén paralelogrammák. Mivel a paralelogramma átlója felezi a területét, ezért az AC felezi az $ABCD$, az $AEPG$, valamint a $PFCH$ négyszög területét is, így az ábrán azonos módon (t_1-gyel, illetve t_2-vel) megjelölt háromszögek területe megegyezik. Ha a $t_1 + t_2$ összeget a szintén egyenlő területű ACD, illetve ABC háromszögek területéből kivonjuk, akkor a $GPHD$, illetve $EBFP$ paralelogrammák területét kapjuk, így $T_{GPHD} = T_{EBFP} = 30$. 2 pont

Az APG és a CPF háromszögek megfelelő oldalai párhuzamosak egymással, ezért a két háromszög hasonló egymáshoz. 2 pont

Az APG és a CPF háromszögek hasonlóságának aránya $\frac{AP}{CP} = \frac{3}{2}$, ezért $\frac{PG}{PF} = \frac{3}{2}$. 1 pont

Mivel a $GPHD$ és a $PFCH$ paralelogrammákban a GP és a PF oldalhoz tartozó magasság megegyezik, ezért területük aránya ugyanakkora, mint alapjuk hosszának aránya, azaz

$$\frac{T_{GPHD}}{T_{PFCH}} = \frac{GP}{PF} = \frac{3}{2},$$

amiből következik, hogy $T_{PFCH} = \frac{2}{3} \cdot T_{GPHD} = \frac{2}{3} \cdot 30 = 20.$ 2 pont

Hasonló gondolatmenet alapján

$$\frac{T_{AEPG}}{T_{EBFP}} = \frac{PG}{FP} = \frac{3}{2},$$

amiből következik, hogy $T_{AEPG} = \frac{3}{2} \cdot T_{EBFP} = \frac{3}{2} \cdot 30 = 45.$ 1 pont

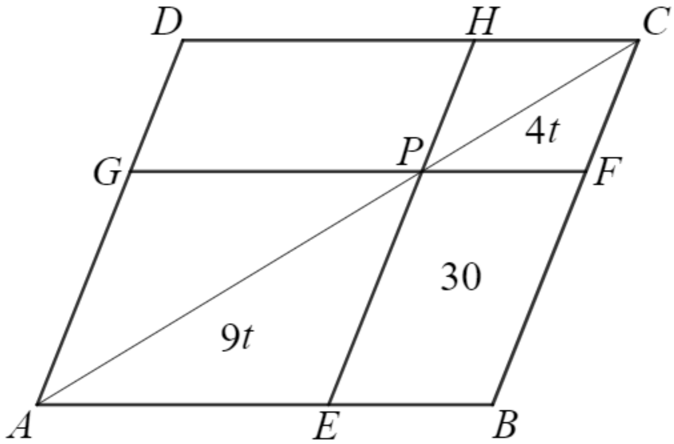
Az $ABCD$ paralelogramma területe így

$$T_{ABCD} = 2 \cdot 30 + 20 + 45 = 125.$$ 1 pont

Összesen: 10 pont

Harmadik megoldás:

Ábrát készítünk a feladat szövege alapján. Az $EBFP$ négyszög paralelogramma, mert szemközti oldalai párhuzamosak. 1 pont



A kapott $AEPG$ és $PFCH$ négyszögek szintén paralelogrammák. Mivel a paralelogramma átlója felezi a területét, ezért az AC felezi az $ABCD$, az $AEPG$, valamint a $PFCH$ négyszög területét is. 1 pont

Az AEP, a PFC és az ABC háromszögek megfelelő oldalai párhuzamosak egymással, ezért a háromszögek hasonlók egymáshoz. 2 pont

Az AEP, a PFC és az ABC háromszögek hasonlóságának aránya

$$AP : PC : AC = 3 : 2 : 5,$$

ezért a területük aránya

$$T_{AEP} : T_{PFC} : T_{ABC} = 9 : 4 : 25.$$ 2 pont

Ekkor van olyan t pozitív valós szám, amelyre $T_{AEP} = 9t$, $T_{PFC} = 4t$ és $T_{ABC} = 25t$. 1 pont

Innen az ABC háromszög területe $25t = 9t + 4t + 30$, 1 pont

amiből $t = \frac{5}{2}$. 1 pont

Az $ABCD$ paralelogramma területe tehát

$$T_{ABCD} = 2 \cdot T_{ABC} = 2 \cdot 25t = 50 \cdot \frac{5}{2} = 125.$$ 1 pont

Összesen: 10 pont

3. Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán.

$$\frac{1}{\sqrt{10-x}}-\frac{1}{\sqrt{10+x}}=2$$

<u>Megoldás</u>:

A kifejezésben szereplő törtek és négyzetgyökök miatt $10 - x > 0$ és $10 + x > 0$, ahonnan $-10 < x < 10$. 1 pont*

Közös nevezővel szorzás, majd rendezés után

(1) $$\sqrt{10+x}-\sqrt{10-x}=2\cdot\sqrt{100-x^2}.$$ 1 pont

Figyelembe véve, hogy $\sqrt{100-x^2}>0$, így $\sqrt{10+x}-\sqrt{10-x}>0$, ahonnan $x > 0$. 1 pont*

Az (1) egyenletből négyzetre emelés után

$$10+x+10-x-2\cdot\sqrt{100-x^2}=4\left(100-x^2\right),$$ 1 pont

majd összevonás és rendezés után a $2\cdot\left(100-x^2\right)+\sqrt{100-x^2}-10=0$ egyenlethez jutunk. 1 pont**

Az $y=\sqrt{100-x^2}$ új változó bevezetése után a $2y^2+y-10=0$ másodfokú egyenletet kapjuk, melynek megoldásai $y_1=2$ és $y_2=-\frac{5}{2}$. 2 pont**

Mivel $y=\sqrt{100-x^2}>0$, ezért az $y = 2$ az egyetlen megoldása az egyenletnek. 1 pont**

Tehát $\sqrt{100-x^2}=2$, ahonnan az $x=\pm\sqrt{96}=\pm4\sqrt{6}$. 1 pont**

A megoldás során ekvivalens átalakításokat végeztünk, így az $x > 0$ feltétel alapján az $x=4\sqrt{6}$ az eredeti egyenlet egyetlen megoldása. <u>1 pont</u>

Összesen: 10 pont

*Megjegyzés: A *-gal jelölt pontokat kapja meg a versenyző, ha ellenőrzés útján győződik meg arról, hogy az $x=-4\sqrt{6}$ nem megoldása az egyenletnek.*

*A **-gal jelölt pontokat a versenyző az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja:*

Az összevonások és rendezés után $\sqrt{100-x^2}=2x^2-190$. *1 pont*

Figyelembe véve, hogy $\sqrt{100-x^2}>0,$ így $2x^2-190>0,$ *ahonnan* $x^2>95.$ *1 pont*

Négyzetre emelés és rendezés után az x^2-ben másodfokú $4x^4-759x^2+36000=0$ egyenletet kapjuk, *1 pont*

amelynek az $x^2>95$ feltételnek eleget tevő megoldásai $x=\pm\sqrt{96}=\pm4\sqrt{6}$. *2 pont*

4. Határozza meg az alábbi kifejezés legkisebb értékét, ahol x valós szám. Mely x esetén veszi fel a kifejezés ezt az értéket?

$$(x^2-6x+10)\cdot(x^2+6x+10)$$

Első megoldás:

A szorzás elvégzése és összevonás után az

$$(x^2-6x+10)\cdot(x^2+6x+10)=x^4-16x^2+100$$

kifejezést kapjuk, 1 pont

amely átírható $x^4-16x^2+100=(x^2-8)^2+36$ alakba. 2 pont

A kapott kifejezésben $(x^2-8)^2\ge 0$, 1 pont

tehát a vizsgált kifejezésre $(x^2-8)^2+36\ge 36$ minden valós x esetén. 1 pont

A lehetséges minimumérték, azaz a 36 pontosan akkor áll elő, ha $(x^2-8)^2=0$, 1 pont

vagyis, ha $x^2=8$, 1 pont

amiből a két minimumhely: $x_1=-2\sqrt{2}$, illetve $x_2=2\sqrt{2}$. 2 pont

Tehát a kifejezés minimumértéke 36, amelyet az $x=\pm 2\sqrt{2}$ esetén veszi fel. 1 pont

Összesen: 10 pont

Második megoldás:

Vizsgáljuk az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=(x^2-6x+10)\cdot(x^2+6x+10)$ függvényt.
A szorzás elvégzése és összevonás után $f(x)=x^4-16x^2+100$. 1 pont

Az f függvénynek ott lehet szélsőértéke, ahol $f'(x)=4x^3-32x=0$. 2 pont

Kiemelés után $4x(x^2-8)=0$, amiből $x_1=-2\sqrt{2}$, $x_2=2\sqrt{2}$ és $x_3=0$. 2 pont

	$x<-2\sqrt{2}$	$x=-2\sqrt{2}$	$-2\sqrt{2}<x<0$	$x=0$	$0<x<2\sqrt{2}$	$x=2\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}<x$
f'	negatív	0	pozitív	0	negatív	0	pozitív
f	szigorúan monoton csökken	lokális minimum-hely $f(x)=36$	szigorúan monoton nő	lokális maximum-hely	szigorúan monoton csökken	lokális minimum-hely $f(x)=36$	szigorúan monoton nő

3 pont*

Mivel $f(-2\sqrt{2})=f(2\sqrt{2})=36$, ezért ez a függvény (globális) minimumértéke. 1 pont

Tehát a kifejezés minimumértéke 36, amelyet az $x=\pm 2\sqrt{2}$ esetén veszi fel. 1 pont

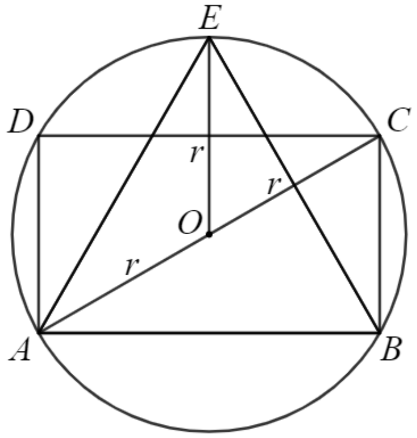
Összesen: 10 pont

*Megjegyzés: A *-gal jelölt 3 pontot kapja meg a versenyző, ha az első derivált előjelvizsgálata helyett a második derivált előjeléből következtet a szélsőértékek jellegére.*

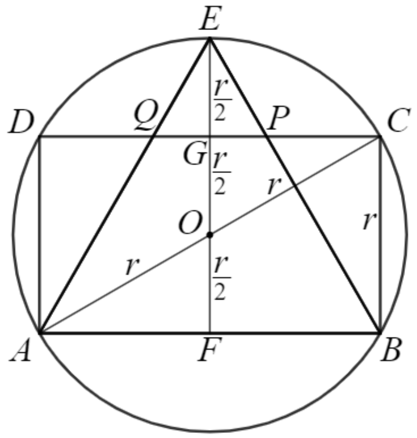
5. Az $ABCD$ téglalap és az ABE szabályos háromszög körülírt köre megegyezik. Fejezze ki a körülírt kör r sugarának függvényében a téglalap és a háromszög közös részének területét.

<u>Első megoldás</u>:

Ábrát készítünk a feladat szövege alapján.



Az $ABCD$ téglalap és az ABE szabályos háromszög közös körülírt körének középpontját jelölje O. Ekkor $OA = OC = OE = r$. 1 pont



Jelölje F az ABE szabályos háromszög AB oldalának felezőpontját. Ekkor EF szakasz a háromszög súlyvonala, és O pont pedig a szabályos háromszög súlypontja, hiszen egybeesik a körülírt körének középpontjával. 1 pont

A háromszög súlypontja a súlyvonalat a csúcstól távolabbi harmadolópontjában osztja két részre, ezért $FO = \frac{r}{2}$ és $FE = \frac{3r}{2}$. 1 pont

A szabályos háromszög EF súlyvonala merőleges az AB oldalára, tehát párhuzamos az ABC derékszögű háromszög BC oldalával, így az AFO és az ABC háromszögek hasonlók egymáshoz. A hasonlóság aránya $\frac{AO}{AC} = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2}$, amiből következik, hogy a téglalap BC oldalának hossza r. 1 pont

Jelölje a téglalap CD oldalának felezőpontját G, valamint CD-nek a háromszög BE, illetve AE oldalával vett metszéspontját P, illetve Q.

Mivel $FG = BC = r$, ezért $EG = \frac{3r}{2} - r = \frac{r}{2}$. 1 pont

A QPE és az ABE háromszögek hasonlók egymáshoz, mert megfelelő oldalaik párhuzamosak. A hasonlóság aránya $\frac{EG}{EF} = \frac{\frac{r}{2}}{\frac{3r}{2}} = \frac{1}{3}$, 1 pont

így a területeik aránya $\frac{T_{QPE}}{T_{ABE}} = \frac{1}{9}$, amiből $T_{ABPQ} = 8 \cdot T_{QPE}$ adódik. 1 pont

A Pitagorasz-tétel alapján a QGE félszabályos háromszögben $QG^2 + GE^2 = EQ^2$, amiből $\left(\frac{EQ}{2}\right)^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 = EQ^2$. Rendezés után a QPE szabályos háromszög oldalának hossza $EQ = \frac{r\sqrt{3}}{3}$, 1 pont

így a területe $T_{QPE} = \frac{EQ^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{r^2 \cdot \sqrt{3}}{12}$. 1 pont

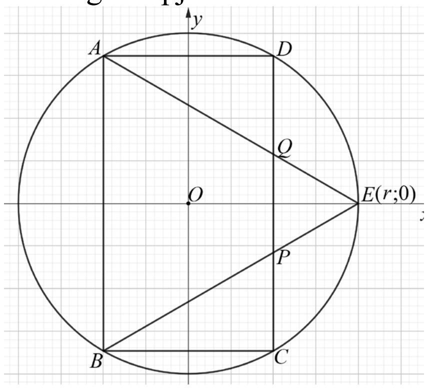
A téglalap és a háromszög közös részének területe a fentiek alapján tehát

$$T_{ABPQ} = 8 \cdot T_{QPE} = \frac{8 \cdot r^2 \sqrt{3}}{12} = \frac{2 \cdot r^2 \sqrt{3}}{3}.$$ 1 pont

Összesen: 10 pont

Második megoldás:

Ábrát készítünk a feladat szövege alapján.



A szabályos háromszög és egyben a téglalap körülírt körének középpontja legyen a derékszögű koordinátarendszer origója, így $O(0; 0)$, továbbá a szabályos háromszög téglalapra nem illeszkedő csúcsa legyen $E(r; 0)$. Jelölje a téglalap CD oldalának a háromszög BE, illetve AE oldalával vett metszéspontját P, illetve Q. 1 pont

Az O pont a szabályos háromszög súlypontja, hiszen egybeesik a körülírt kör középpontjával, így az E csúcsból induló súlyvonalat a csúcstól távolabbi harmadolópontban osztja két részre. Tehát A és B pont első koordinátája $-\frac{r}{2}$. 2 pont

Ekkor a téglalap szimmetriája miatt a C és a D pont, így a P és a Q pont első koordinátája is $\frac{r}{2}$. 1 pont

Az ABE szabályos háromszög AE oldalegyenesének egyenlete felírható az egyenes α irányszögének és az egyenesre illeszkedő E pontjának a segítségével. A háromszög belső szögei 60°-osak, így $\alpha = -30°$, amiből az egyenes meredeksége $m = \operatorname{tg}(-30°) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, tehát az egyenes egyenlete: $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{r\sqrt{3}}{3}$. 2 pont

Mivel az A és a Q pont is illeszkedik az AE egyenesre, ezért a megfelelő x értékeket az egyenletbe behelyettesítve kapjuk, hogy $A\left(-\frac{r}{2}; \frac{r\sqrt{3}}{2}\right)$ és $Q\left(\frac{r}{2}; \frac{r\sqrt{3}}{6}\right)$, amiből $B\left(-\frac{r}{2}; -\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)$ és $P\left(\frac{r}{2}; -\frac{r\sqrt{3}}{6}\right)$. 2 pont

A közös rész, tehát az $ABPQ$ trapéz területe kiszámítható a trapéz csúcspontjainak koordinátáiból, hiszen $AB = r\sqrt{3}$, $PQ = \frac{r\sqrt{3}}{3}$ és a trapéz magassága r.

A téglalap és a háromszög közös részének területe a fentiek alapján tehát

$$T = \frac{\left(r\sqrt{3} + \frac{r\sqrt{3}}{3}\right)}{2} \cdot r = \frac{2r^2 \cdot \sqrt{3}}{3}.$$ 2 pont

Összesen: 10 pont

6. Egy bolha ugrál a derékszögű koordinátarendszer síkjában. Az origóból indul, és minden lépésben egy egységet ugrik valamelyik koordinátatengellyel párhuzamosan.

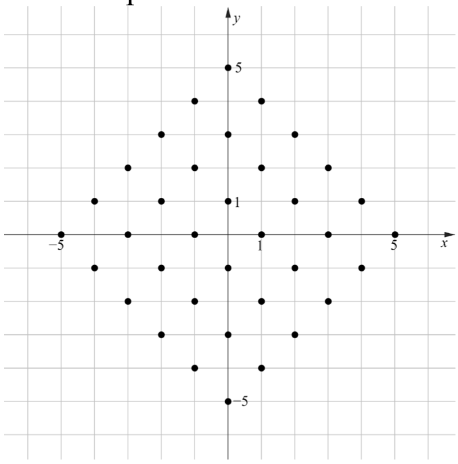
a) Hány olyan pont van, amelyikbe pontosan öt ugrással eljuthat?

b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a bolha az ötödik lépés után a $P(1;2)$ pontban van, ha a lehetséges irányok közül minden ugrásnál ugyanakkora valószínűséggel választ?

Megoldás:

a) A bolha helyzetének koordinátáit, és azok összegét vizsgáljuk. Minden ugrás után valamelyik koordináta, így a koordináták összege is 1-gyel változik. Öt ugrás után a koordináták összege –5, –3, –1, 1, 3, 5 lehet. 1 pont

A bolha az alábbi ábrán látható pontokba érkezhet.



2 pont

Tehát 36 olyan pont van, amelyikbe a bolha pontosan öt ugrással eljuthat. 1 pont

b) A bolha a $P(1;2)$ pontba 5 ugrással a következőképpen juthat el:
- első eset: 2 jobbra, 1 balra és 2 fölfelé ugrás bármilyen sorrendben,
- második eset: 1 jobbra, 3 fölfelé és 1 lefelé ugrás bármilyen sorrendben. 1 pont

Az első esetben az öt ugrás összes lehetséges sorrendjeinek száma $\frac{5!}{2!\cdot 2!}=30$. 1 pont

A második esetben $\frac{5!}{3!}=20$. 1 pont

Így összesen $30+20=50$ féleképpen érkezhet a bolha 5 ugrással a $P(1;2)$ pontba. 1 pont

Az 5 ugrás végrehajtására összesen $4^5=1024$ lehetőség adódik, hiszen minden alkalommal négyféle irány közül választhat. 1 pont

Tehát a keresett valószínűség: $\frac{50}{1024}=\frac{25}{512}\approx 0{,}049$. 1 pont

Összesen: 10 pont