Oktatási Hivatal

A 2017/2018. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
1. forduló

FIZIKA

I. kategória

Javítási-értékelési útmutató

1. feladat. Kosárlabdázásról szóló műsorban hangzik el, hogy a labda laza, derék melletti pattogtatása során a labda felfelé haladva derék magasságban ($h = 1{,}1\,\mathrm{m}$) egy pillanatra megáll, majd a játékos kezének suhintásától pillanatszerűen $v_0 = 2\,\mathrm{m/s}$ sebességre gyorsul.

a) Határozzuk meg a padlóra érkező labda ütközésének rugalmasságát jellemző k ütközési számot, amely szám a v becsapódási és az u visszapattanási sebességek hányadosa ($k = u/v$)!

b) Az adatokból határozzuk meg, hogy a derékmagasságból elejtett labda mennyi ideig pattog a vízszintes talajon!

Megoldás.
a) Jelöljük a labda sebességét v-vel a földet érés előtti pillanatban. Alkalmazzuk az energiamegmaradás törvényét:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh = \frac{1}{2}mv^2. \tag{1}$$

A talajjal való ütközésre igaz:

$$u = kv. \tag{2}$$

Az emelkedésre ismét alkalmazzuk az energiamegmaradás törvényét:

$$\frac{1}{2}mu^2 = mgh. \tag{3}$$

A fenti három egyenletet mint egyenletrendszert megoldva és a k ütközési számot kifejezve:

$$k = \sqrt{\frac{2gh}{v_0^2 + 2gh}} = 0{,}918499 \approx 0{,}92$$

($g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$-tel számolva).

b) Az első földet érésig $t_1 = \sqrt{2h/g}$ idő telik el. A labda sebessége közvetlenül leérkezés előtt $v_1 = \sqrt{2gh}$ (lefelé), közvetlenül utána $u_1 = kv_1$ (felfelé), majd utána egy függőleges hajítás következik $t_2 = 2u_1/g = 2kt_1$ ideig. Közvetlenül a második ütközés előtt a labda sebessége $v_2 = u_1$, utána $u_2 = kv_2 = k^2v_1$. Ezután megint egy függőleges hajítás jön $t_3 = 2u_2/g = 2k^2t_1$ ideig, és így tovább.

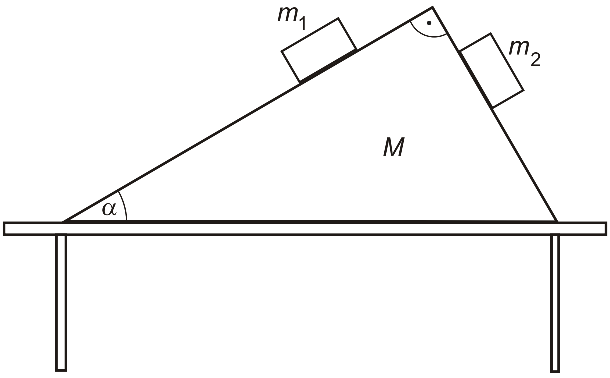
A labda pattogásának teljes ideje (felhasználva a végtelen mértani sor összegképletét):

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}\left(1 + 2k + 2k^2 + \ldots\right) = \sqrt{\frac{2h}{g}}\left(\frac{2}{1-k} - 1\right) = \sqrt{\frac{2h}{g}} \cdot \frac{1+k}{1-k} \approx 11\,\mathrm{s}.$$

2. feladat. Vízszintes asztalon áll egy M tömegű, derékszögű kettős lejtő. A derékszög csúcsától két pontszerűnek tekinthető m_1, illetve m_2 tömegű testet egyszerre elengedünk. A testek és a lejtő közötti súrlódástól eltekinthetünk. Legalább mekkorának kell lennie a kettős lejtő és az asztal lapja között minimálisan a tapadási súrlódási együtthatónak ahhoz, hogy semmilyen α hajlászög esetén a kettős lejtő ne mozduljon el addig, amíg mindkét hasáb a kettős lejtőn csúszik, ha

a) $m_1 = m_2 = m$,

b) $m_1 = 2m$; $m_2 = m$; $M = 3m$?



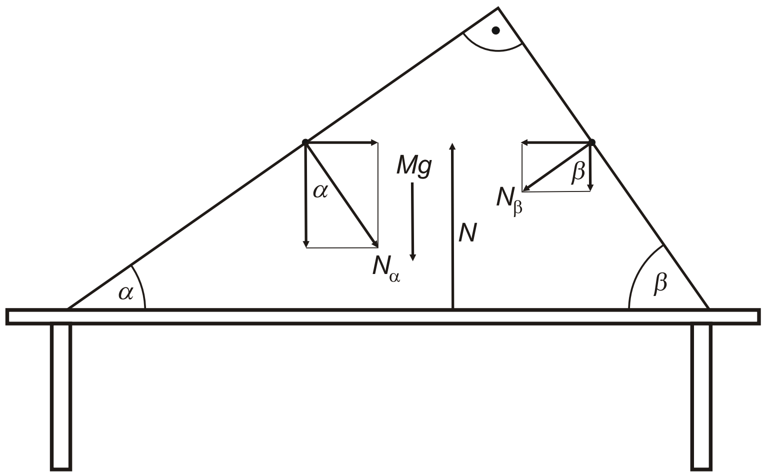
Megoldás. *a)* Jelölje N_α , N_β az m_1, m_2 tömegű testek által a lejtőre kifejtett nyomóerőket, N az asztal és a lejtő közötti kényszererőt. A csúszó testek a lapjukra merőlegesen nem gyorsulnak, ezért $N_\alpha = m_1 g \cos\alpha$, $N_\beta = m_2 g \cos\beta$. A lejtő akkor nem mozdul el, ha

$$\begin{aligned} |N_\alpha \sin\alpha - N_\beta \sin\beta| &\leq \mu_0 N, \\ |m_1 g \cos\alpha \sin\alpha - m_2 g \cos\beta \sin\beta| &\leq \mu_0 N, \\ |mg \cos\alpha \sin\alpha - mg \cos\beta \sin\beta| &\leq \mu_0 N. \end{aligned}$$

Derékszögű háromszögben $\cos\alpha = \sin\beta$ és $\cos\beta = \sin\alpha$, és mivel $m_1 = m_2$, így

$$N_\alpha \sin\alpha = N_\beta \sin\beta,$$

azaz ekkor súrlódásmentes felületen sem mozdul el a kettős lejtő a testek lecsúszása közben.



b) A lejtő akkor nem mozdul el, ha

$$\begin{aligned}
|N_\alpha \sin\alpha - N_\beta \sin\beta| &\leq \mu_0 N,\\
|m_1 g\cos\alpha\sin\alpha - m_2 g\cos\beta\sin\beta| &\leq \mu_0(Mg + m_1 g\cos^2\alpha + m_2 g\cos^2\beta),\\
2mg\cos\alpha\sin\alpha - mg\sin\alpha\cos\alpha &\leq \mu_0(3mg + 2mg\cos^2\alpha + mg\sin^2\alpha),\\
\sin\alpha\cos\alpha &\leq \mu_0(4+\cos^2\alpha),\\
\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{4+\cos^2\alpha} &\leq \mu_0.
\end{aligned}$$

Az egyenlőtlenség bal oldalán álló kifejezést alakítsuk át:

$$\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{4+\cos^2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{8\sin^2\alpha + 10\cos^2\alpha} = \frac{2}{8\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + 10\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} = \frac{1}{\dfrac{8\,\mathrm{tg}\,\alpha + 10\dfrac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}}{2}}.$$

A maximális érték meghatározásához keressük a nevező minimumát. Használjuk fel két pozitív szám számtani és mértani közepére vonatkozó egyenlőtlenséget:

$$\frac{8\,\mathrm{tg}\,\alpha + 10\dfrac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}}{2} \geq \sqrt{8\,\mathrm{tg}\,\alpha\frac{10}{\mathrm{tg}\,\alpha}} = \sqrt{80}.$$

A nevező minimuma $\sqrt{80}$, így a kifejezés maximuma $1/\sqrt{80}$,

$$\mu_0 \geq \frac{1}{\sqrt{80}} \approx 0{,}112.$$

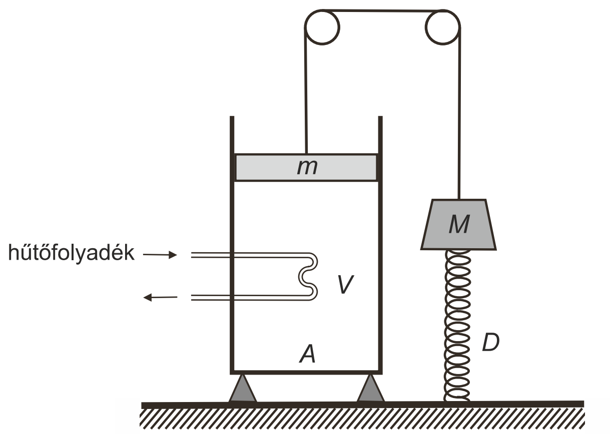
Tehát a hasáb és az asztal lapja közötti tapadási súrlódási együtthatónak legalább $1/\sqrt{80}$-nak kell lennie ahhoz, hogy tetszőleges hajlásszögű, derékszög alakú kettős lejtő ne mozduljon el a testek lecsúszása közben.

Megjegyzés: Differenciálszámítás segítségével is meghatározhatjuk μ_0 minimumát. Beláthatjuk továbbá, hogy $\alpha = 48{,}2°$ hajlásszög esetén van szükség a 0,112 értékű súrlódási együtthatóra, hogy elkerüljük a kettős lejtő megcsúszását, más hajlásszögeknél ennél kisebb súrlódási együttható is elegendő.

3. feladat. Az ábrán látható termomechanikai készülék $A = 4\,\mathrm{dm}^2$ keresztmetszetű hengerében $m = 60\,\mathrm{kg}$ tömegű, könnyen mozgó dugattyú $V_1 = 16\,\mathrm{liter}$, $T_1 = 300\,\mathrm{K}$ hőmérsékletű, $n = 0{,}5\,\mathrm{mol}$ anyagmennyiségű neongázt zár el. A dugattyú két állócsigán átvetett fonállal $M = 240\,\mathrm{kg}$ tömegű nehezékkel van összekötve, amely egy összenyomódott $D = 6600\,\mathrm{N/m}$ direkciós erejű rugón nyugszik. A nehezék nincs a rugóhoz rögzítve. A rendszer ekkor egyensúlyban van. A külső légnyomás $p_0 = 10^5\,\mathrm{Pa}$, a nehézségi gyorsulás értéke $9{,}81\,\mathrm{m/s}^2$. A hengerbe vezetett csőben hűtőfolyadékot áramoltatunk, így a gáz hőmérséklete lassan csökken.

a) Mekkora a gáz hőmérséklete akkor, amikor a nehezék felemelkedve éppen elhagyja a rugót?

b) Mennyi hőt kell ehhez elvonni a gáztól? A hőveszteség a henger falán, illetve a dugattyún át elhanyagolható.



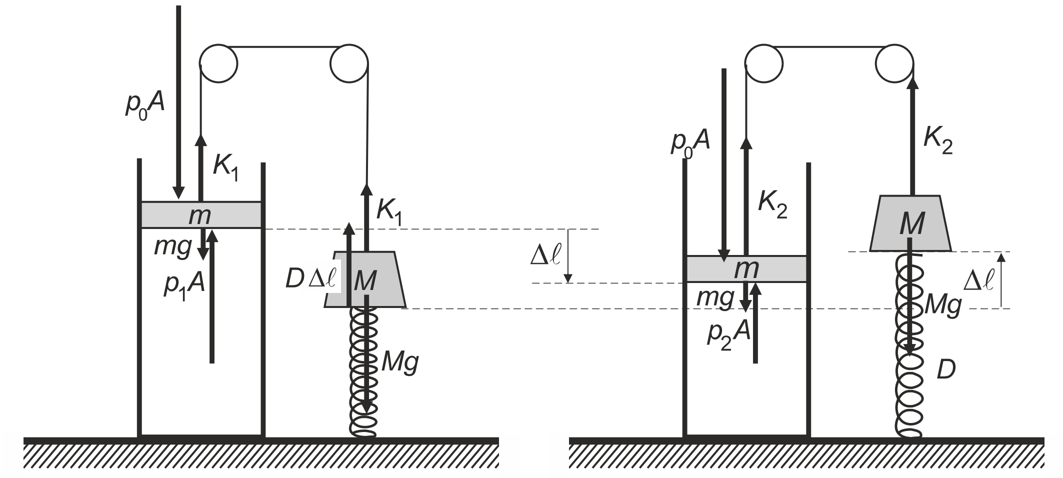
Megoldás *a)* Először határozzuk meg a bezárt gáz kezdeti nyomását. A gáztörvény alapján:

$$p_1 V_1 = nRT_1 \quad \to \quad p_1 = n \cdot \frac{RT_1}{V_1} = 77943{,}8\,\mathrm{Pa} \approx 0{,}78 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}.$$

Ezután számítsuk ki a rugó kezdeti deformációját. Az egyensúly feltétele a dugattyúra és a nehezékre a kezdőállapotban (lásd a következő, bal oldali ábrát):

$$p_0 A + mg - K_1 - p_1 A = 0,$$

$$Mg - D\Delta l - K_1 = 0.$$



Innen a rugó kezdeti deformációja:

$$p_0A + mg - p_1A = Mg - D\Delta l \quad \rightarrow \quad \Delta l = \frac{p_1A + Mg - p_0A - mg}{D}.$$

Számadatainkkal:

$$\Delta l = 0{,}133871\,\mathrm{m} \approx 13\,\mathrm{cm}.$$

A gáz térfogata a végállapotban:

$$V_2 = V_1 - A\Delta l = 0{,}0106452\,\mathrm{m}^3 \approx 10{,}6\,\mathrm{liter}.$$

Meghatározhatjuk a gáz nyomását is a végállapotban, amikor a rugó deformációmentes. Ekkor az egyensúlyi egyenletek így egyszerűsödnek:

$$Mg - K_2 = 0,$$

$$mg + p_0A - K_2 - p_2A = 0.$$

Innen a végső nyomás:

$$p_2A = mg + p_0A - Mg \quad \rightarrow \quad p_2 = \frac{(m-M)g}{A} + p_0 = 55855\,\mathrm{Pa} \approx 0{,}56 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}.$$

Mivel tudjuk a gáz anyagmennyiségét, valamint a végállapotbeli térfogatát és nyomását, így az ideális gázok állapotegyenlete alapján megkaphatjuk a kérdéses hőmérsékletet is:

$$T_2 = \frac{p_2V_2}{nR} = 143{,}033\,\mathrm{K} \approx 143\,\mathrm{K} = -130\,^\circ\mathrm{C}.$$

b) A gáztól elvont hőt a termodinamika első főtétele alapján kaphatjuk meg:

$$Q = \Delta E - W = \frac{f}{2}nR\Delta T + p_{\text{átlag}}\Delta V,$$

ahol a neongáz szabadsági fokszáma $f = 3$, továbbá a gáz hőmérséklet-csökkenése $\Delta T = T_2 - T_1 = -157\,\mathrm{K}$. A munkavégzés esetében az átagos nyomás egyszerűen a kezdeti és a végállapotbeli nyomások számtani közepe ($p_{\text{átlag}} = (p_1 + p_2)/2$), mert a rugó lineáris erőtörvénye miatt a bezárt gáz nyomása is lineáris függvénye a térfogatnak. Az adatok behelyettesítése után

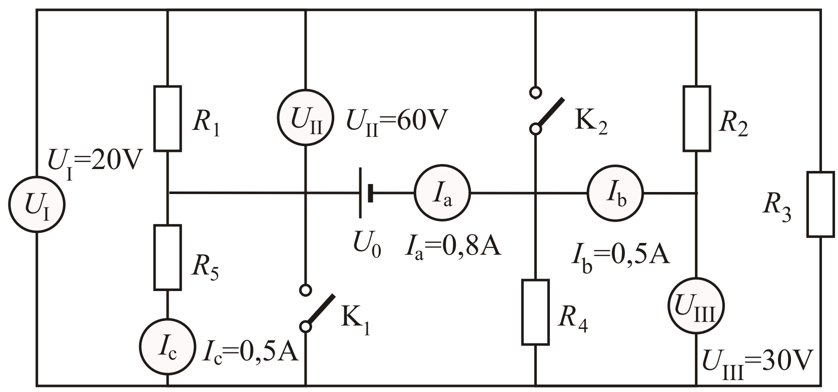
$$Q = \frac{3}{2}nR(T_2 - T_1) + \frac{p_1 + p_2}{2}(V_2 - V_1) = -1337{,}001\,\mathrm{J} \approx -1340\,\mathrm{J}$$

adódik.

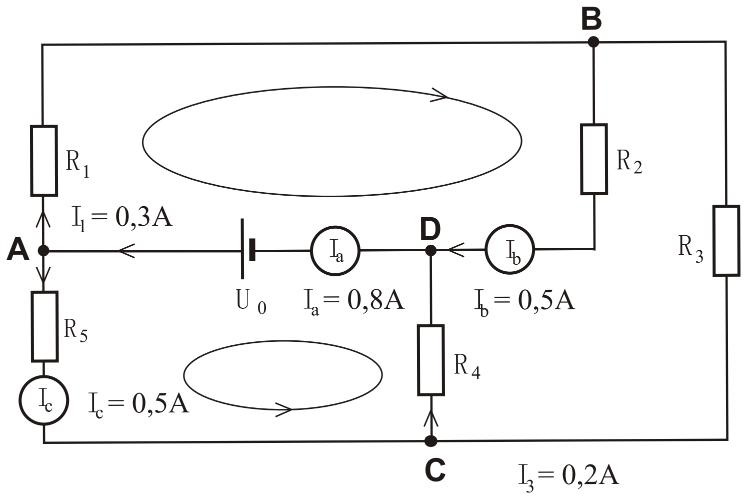
4. feladat. Az ábra szerinti kapcsolásban ideálisnak tekinthető műszerek vannak, melyek a K_1 és K_2 kapcsolók nyitott állása esetén a melléjük írt értékeket mutatják, tehát a feszültségek $U_{\mathrm{I}} = 20\,\mathrm{V}$, $U_{\mathrm{II}} = 60\,\mathrm{V}$ és $U_{\mathrm{III}} = 30\,\mathrm{V}$. Az áramerősségek pedig $I_{\mathrm{a}} = 0{,}8\,\mathrm{A}$, $I_{\mathrm{b}} = 0{,}5\,\mathrm{A}$ és $I_{\mathrm{c}} = 0{,}5\,\mathrm{A}$.

a) Mekkorák az R_1, R_2, R_3, R_4 és R_5 ellenállások értékei? Mekkora az áramforrás állandónak tekinthető U_0 feszültsége?

b) Mennyit mutatnak a műszerek, ha mindkét kapcsoló zárt állásban van?



Megoldás. *a)* Hagyjuk ki a feszültségmérőket és a kapcsolókat, azokon át amúgy sem folyik áram. Használjuk az ábra jelöléseit. A kapott értékeket írjuk be az alábbi táblázatba is. Amennyiben nem lenne a 3-as ellenállás, akkor a felső, ABD ág és az alsó, ACD ág párhuzamosan lenne kapcsolva, és bennük, az áramforrás polaritása miatt, a jelölt „körbejárás” irányban folyna az áram. A 3-as ellenállás jelenléte ezen nem változtat, és a rajta folyó áramot a többi meghatározza. Nézzük az áramokat. A műszerek elhelyezkedése miatt $I_2 = I_{\mathrm{b}} = 0{,}5$ A, illetve $I_5 = I_{\mathrm{c}} = 0{,}5$ A.



Az elágazásoknál:
az A pontnál $I_1 = 0{,}8\,\mathrm{A} - 0{,}5\,\mathrm{A} = 0{,}3\,\mathrm{A}$,
a D pontnál $I_4 = 0{,}8\,\mathrm{A} - 0{,}5\,\mathrm{A} = 0{,}3\,\mathrm{A}$,
a C pontnál $I_3 = 0{,}5\,\mathrm{A} - 0{,}3\,\mathrm{A} = 0{,}2\,\mathrm{A}$.

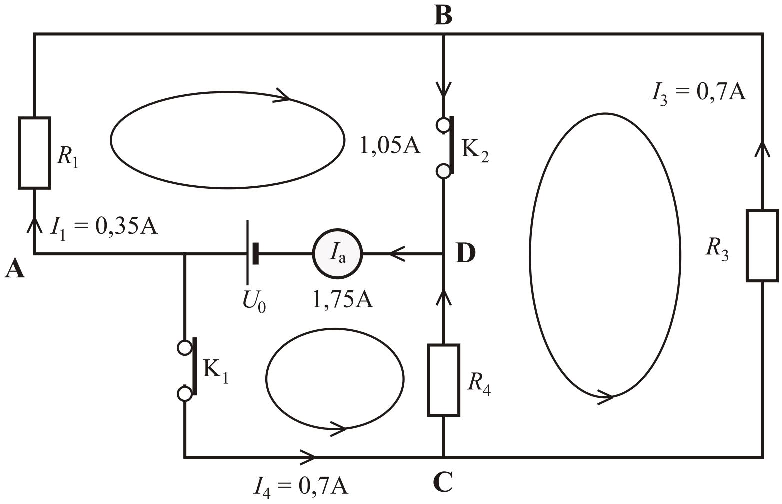
megnevezés	1	2	3	4	5
$I(A)$	0,3	0,5	0,2	0,3	0,5
$U(V)$	60	10	20	30	40
$R(\Omega)$	200	20	100	100	80

Nézzük a feszültségeket. A műszerek elhelyezkedése miatt $U_3 = U_\mathrm{I} = 20\,\mathrm{V}$, $U_1 = U_\mathrm{II} = 60\,\mathrm{V}$ illetve $U_4 = U_\mathrm{III} = 30\,\mathrm{V}$. Két azonos pont között az ábra szerinti kapcsolásban végigmenve a feszültségesések előjeles összegének meg kell egyezni. Ezért: $U_1 = U_5 + U_3$ miatt $U_5 = U_1 - U_3 = 40\,\mathrm{V}$, $U_4 = U_3 + U_2$ miatt $U_2 = U_4 - U_3 = 10\,\mathrm{V}$. Az áramforrás U_0 feszültsége pedig $U_0 = U_1 + U_2 = U_5 + U_4 = 70\,\mathrm{V}$. Az ellenállások az Ohm-törvényből, $R = U/I$ alapján kaphatók, értékeik a táblázatban találhatók.

b) Ismét hagyjuk el azokat a részeket, melyekben nem folyik áram. A kapott értékeket ismét rögzítsük táblázatban. Az 5-ös ellenállás és a c jelű árammérő együttes feszültsége (az 1-es kapcsoló miatt) nulla. Az árammérő feszültsége nulla, ezért az ellenállásé is, $I_\mathrm{c} = 0$, az ág elhagyható.

A 2-es ellenállás és a b jelű árammérő együttes feszültsége (a 2-es kapcsoló miatt) nulla. Így ha a b jelű műszeren át folyna áram, akkor az csak a III-as feszültségmérőn folyhatna tovább, azon viszont nem tud, ezért $I_\mathrm{b} = 0$, az ág elhagyható. A feszültségmérők ága szintén elhagyható.

A kapott rajz alapján megállapíthatjuk, hogy mindhárom megmaradt ellenállás egyik vége az A pontéval, másik vége a D pontéval azonos potenciálon van, vagyis mindháromra az áramforrás feszültsége jut, párhuzamosan vannak kapcsolva. Az egyes „tartományokban” az áram irányát az áramforrás polaritása meghatározza.



Az Ohm-törvény alapján az egyes ellenállások árama: $I_1 = 0{,}35\,\mathrm{A}$, $I_3 = 0{,}7\,\mathrm{A}$, $I_4 = 0{,}7\,\mathrm{A}$. A B csomópontnál „összefolyik" I_1 és I_3, a K_2 kapcsolón át már 1,05 A folyik. A D pontnál ehhez járul még I_4, így az a jelű műszeren és az áramforráson át 1,75 A folyik.

U_{I}	70 V
U_{II}	70 V
U_{III}	70 V

,

I_a	1,75 A
I_b	0 A
I_c	0 A

A feszültségmérők közül az I-es jelű a 3-as ellenállás feszültségét, a II-es jelű a 1-es ellenállás feszültségét, a III-as jelű a 4-es ellenállás feszültségét mutatja, vagyis mindegyik 70 V-ot jelez.

Értékelési útmutató

1. feladat

a)	Az energiamegmaradás törvényének felírása az első esési szakaszra:	2 pont
	Az ütközési szám figyelembevétele az első ütközésnél:	2 pont
	Az energiamegmaradás törvényének felírása az első emelkedési szakaszra:	2 pont
	Az ütközési szám meghatározása:	4 pont
b)	Az első esési szakasz idejének megadása:	2 pont
	A következő esési szakasz idejének megadása:	2 pont
	A mozgás teljes idejét megadó mértani sor felírása:	4 pont
	A mozgás teljes idejének számszerű megadása:	2 pont
	Összesen:	**20 pont**

2. feladat

a)	A testekre ható erők megadása:	3 pont
	A kettős lejtő egyensúlyi feltételének megadása:	2 pont
	Annak igazolása, hogy súrlódásmentes felületen sem mozdul el a kettős lejtő:	5 pont
b)	μ_0 minimumának kifejezése α trigonometrikus függvényében:	5 pont
	μ_0 minimumának a kettős lejtő hajlásszögétől független megadása:	5 pont
	Összesen:	**20 pont**

3. feladat

a)	A gáz kezdeti nyomásának meghatározása:	3 pont
	A rugó deformációjának meghatározása:	4 pont
	A gáz nyomásának kiszámítása a végső állapotban:	4 pont
	A gáz végső hőmérsékletének meghatározása:	4 pont
b)	A gáztól elvont hő meghatározása:	5 pont
	Összesen:	**20 pont**

4. feladat

a)	Az egyes ellenállások meghatározása:	5×2 pont
	U_0 helyes megadása:	1 pont
b)	A három feszültségmérő által mutatott érték megadása:	3 pont
	A három árammérő által mutatott érték kiszámítása:	3×2 pont
	Összesen:	**20 pont**

A megoldásban vázoltaktól eltérő számításokra, amelyek elvileg helyesek és helyes végeredményre vezetnek, az alkérdésekre adható teljes pontszám jár.