Oktatási Hivatal

A 2018/2019. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
első forduló

FIZIKA

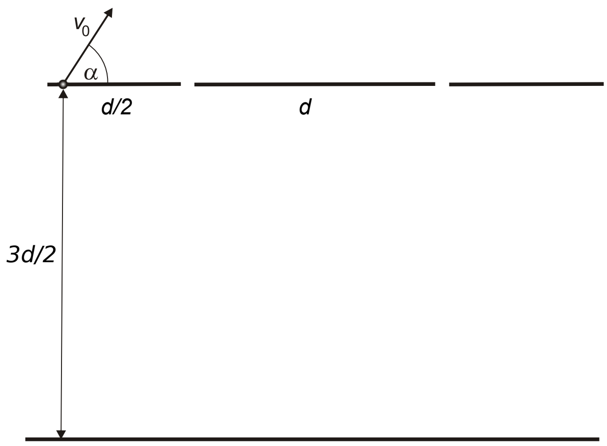
I. kategória

Javítási-értékelési útmutató

A versenyzők figyelmét felhívjuk arra, hogy áttekinthetően és olvashatóan dolgozzanak. Amennyiben áttekinthetetlen és olvashatatlan részek vannak a dolgozatban, azok az értékelés szempontjából figyelmen kívül maradnak.

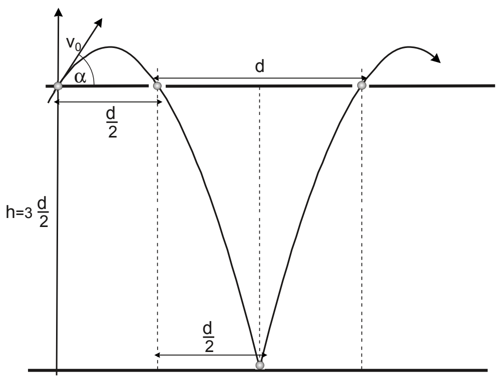
1. feladat

Egy vízszintes, vékony lemezen két kis méretű lyuk van egymástól $d = 2$ m távolságra. Az *ábrán* látható módon a bal oldali lyuktól $d/2$ távolságra a lemez felületéről egy kicsiny, rugalmas golyót ferdén eldobunk. Mekkora α szög alatt és mekkora v_0 sebességgel hajítsuk el a golyót, ha azt szeretnénk, hogy a golyó a közelebbi lyukon átesve, majd a lemez alatt $h = 3d/2$ mélyen lévő súrlódásmentes kőpadlóról pillanatszerűen és abszolút rugalmasan ütközve a másik lyukon áthaladjon? (A golyó mozgásának leírásakor a légellenállástól is eltekinthetünk.)



I. Megoldás

A talajról való rugalmas ütközést követően a golyó sebességének vízszintes komponense változatlan marad, a függőleges komponense pedig ellentettjére változik. Ezért ahhoz, hogy a golyó a második lyukon is áthaladjon, az ütközési pont a két lyuk közötti lemezrész felezőmerőlegesén kell elhelyezkedjen.



Jelölje t a kőpadlóval való ütközésig eltelt időt. Rögzítsük az $x-y$ koordináta-rendszer origóját az eldobás helyéhez. Az ütközésig a golyó x irányban d utat tesz meg:

$$d = v_0 \cos\alpha \cdot t. \tag{1}$$

Ez idő alatt az y irányú elmozdulás:

$$-\frac{3}{2}d = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{g}{2}t^2. \tag{2}$$

Mivel az első lyuk $d/2$ távolságra helyezkedik el az eldobás helyétől, ezért amíg a golyó idáig elérkezik $t/2$ idő telik el. Ebben a pillanatban a golyó ismét a lemez síkjában van:

$$0 = v_0 \sin\alpha \cdot \frac{t}{2} - \frac{g}{2}\frac{t^2}{4}. \tag{3}$$

A (3) egyenletből

$$t = \frac{4v_0 \sin\alpha}{g}. \tag{4}$$

Ezt felhasználva (2)-ben

$$-\frac{3}{2}d = \frac{gt^2}{4} - \frac{gt^2}{2},$$

ahonnan

$$t = \sqrt{\frac{6d}{g}}. \tag{5}$$

Fejezzük ki (1)-ből t-t:

$$t = \frac{d}{v_0 \cos\alpha}. \tag{6}$$

Ezt megszorozva (4)-gyel

$$t^2 = \frac{4d}{g}\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Felhasználva a t-re kapott (5) eredményt

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{3}{2} \quad \to \quad \alpha \approx 56{,}3°.$$

A kezdeti sebességet pedig például (6)-ból kaphatjuk meg, ha t helyére beírjuk az (5) kifejezést:

$$v_0 = \sqrt{\frac{gd}{6\cos^2\alpha}} = \sqrt{\frac{gd}{6}}\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha} = \sqrt{\frac{13gd}{24}} \approx 3{,}3 \text{ m/s}.$$

II. Megoldás

Legyen az eldobástól a tetőpontig eltelt idő t_1. Ekkor a tetőponttól az ütközésig tartó idő $3t_1$, mert a vízszintes elmozdulás háromszoros. (Felhasználtuk, hogy az ütközés a d távolság felénél lesz.) Ha az idő háromszoros, akkor a h_2 süllyedés a h_1 emelkedési magasság kilencszerese lesz. Ebből következik, hogy

$$\frac{8}{9}h_2 = 8h_1 = h = 3\,\mathrm{m}, \quad \rightarrow \quad h_1 = \frac{h}{8} = \frac{3}{8}\,\mathrm{m}.$$

Az elindítás pillanatában a kezdősebesség vízszintes összetevője v_x, amivel a tetőpontig tartó vízszintes elmozdulást így írhatjuk fel:

$$v_x t_1 = \frac{d}{4} = \frac{1}{2}\,\mathrm{m}.$$

A kezdősebesség függőleges összetevője legyen v_y, így az indítástól a tetőpontig a függőleges átlagsebesség $v_y/2$. Az emelkedési magasságra ezt írhatjuk fel:

$$\frac{v_y}{2}t_1 = h_1 = \frac{h}{8} = \frac{3}{8}\,\mathrm{m}.$$

A fenti két egyenletet egymással elosztva kapjuk, hogy

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{h}{d} = \frac{3}{2} \quad \rightarrow \quad \alpha \approx 56{,}3^\circ.$$

A kezdősebesség pedig így kapható meg:

$$v_0 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \frac{1}{t_1}\sqrt{\frac{d^2}{16} + \frac{h^2}{16}} = \frac{\sqrt{d^2 + h^2}}{4t_1} = \frac{\sqrt{d^2 + h^2}}{4\sqrt{\dfrac{2h_1}{g}}} = \frac{\sqrt{d^2 + h^2}}{2\sqrt{\dfrac{h}{g}}} \approx 3{,}3\ \mathrm{m/s}.$$

2. feladat

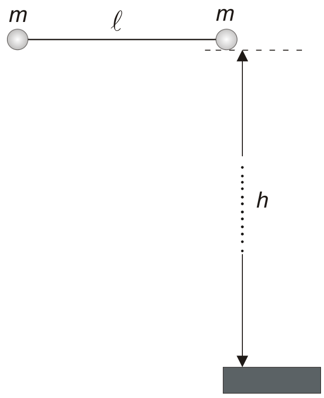
Két, egyenként $m = 0{,}25$ kg tömegű, kis méretű acélgolyó $\ell = 60\,\mathrm{cm}$ hosszú, nyújthatatlan fonállal van összekötve. A két golyót úgy tartjuk, hogy a feszültségmentes fonál vízszintes egyenes legyen. Egy adott pillanatban a két golyót egyszerre, lökésmentesen elengedjük. $h = 1{,}8\,\mathrm{m}$ esés után az egyik golyó egy kiálló merev kőpárkányba ütközik. Az ütközés abszolút rugalmas és pillanatszerű.

a) Mekkora erő feszíti a fonalat az ütközés pillanatától?

b) Milyen mélyen van a talaj a kőpárkánytól, ha a vele ütköző golyó 1 és 3/4 fordulat után a fonál függőleges helyzetében éri el a talajt?

c) Mekkora ebben a pillanatban a két golyó talajhoz viszonyított sebessége?

A közegellenállás elhanyagolható.



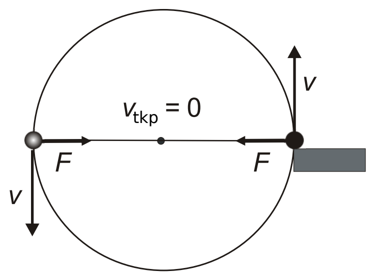
Megoldás

a) A két golyó az ütközésig szabadeséssel teszi meg a h szintkülönbséget, mindkét golyó sebessége az ütközést megelőző pillanatban

$$v = \sqrt{2gh} = 5{,}9\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Közvetlenül az ütközés után a bal oldali golyó megtartja eredeti sebességét, miközben az ütköző golyó sebessége ellentettjére vált. Ezért a rendszer tömegközéppontjának sebessége (az ütéstől) pillanatszerűen zérusra változik, majd zérus kezdősebességről ismét szabadon esik g gyorsulással. A tömegközéppont rendszeréből nézve az ütközés után azonban egy állandó szögsebességű, egyenletes körmozgás kezdődik, amely fenntartásához a fonál megfeszüléséből származó erő szükséges (1. ábra). Ennek nagysága:

$$F = m\frac{v^2}{r} = m\frac{v^2}{\frac{\ell}{2}} = m\frac{2v^2}{\ell} = 29{,}4\,\mathrm{N}.$$



1. ábra

b) Az ütköző golyó mozgása egyrészt a tömegközéppont gyorsuló süllyedéséből, másrészt a tömegközéppont körüli forgásból tevődik össze. Az ütközés utáni h' süllyedést pályájának függőleges egyenesre eső vetülete adja. A golyó mozgásának szögsebessége

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{2v}{\ell} \approx 19{,}8\,\frac{1}{\mathrm{s}}.$$

Az ütköző golyó süllyedése tehát a tömegközéppont süllyedéséből és az elfordulás függőleges vetületéből tevődik össze. A forgás periódusideje:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0{,}32\,\mathrm{s}.$$

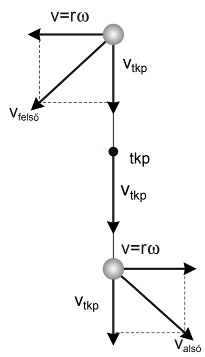
A talajra érkezésig eltelt idő 1,75T. A talaj és a kőpárkány közötti távolság a tömegközéppont által ez idő alatt megtett út és a fonál hosszának fele, hiszen ebben a pillanatban a kőpárkánnyal ütköző golyó éppen a tömegközéppont alatt helyezkedik el:

$$h' = \frac{1}{2} g \left(1{,}75\,T\right)^2 + \frac{\ell}{2} = 1{,}81\,\mathrm{m}.$$

c) Az alsó golyó leérkezési sebességének függőleges összetevője azonos a tömegközéppont sebességével, a vízszintes összetevője a tömegközépponti rendszerbeli forgás kerületi sebességével, így:

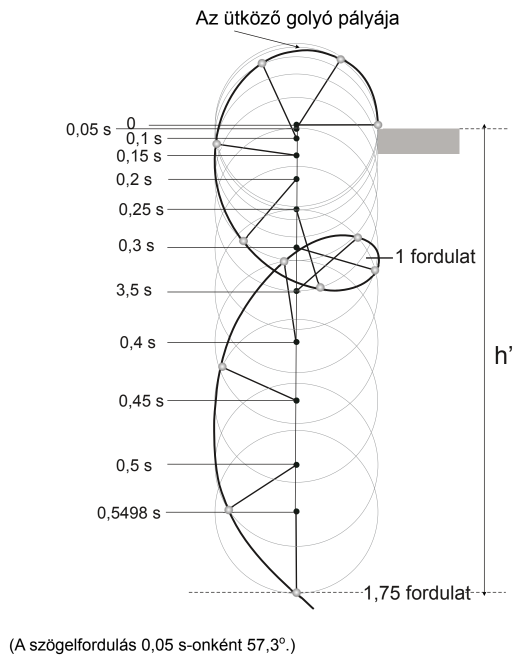
$$v_{\text{alsó}} = \sqrt{\left(g \cdot 1{,}75T\right)^2 + \left(\frac{\ell}{2}\omega\right)^2} = 8{,}1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

A felső golyó sebességének nagysága ugyanekkora, de „balra lefelé” mutat az ábrán látható módon.



2. ábra

Megjegyzés: A párkánnyal ütköző golyó pályáját a 3. ábra mutatja:



3. ábra

3. feladat

Egy héliummal töltött időjárási kutatóléggömböt a tengerszintről indítanak el. A léggömböt úgy méretezik, hogy amikor eléri a végleges emelkedési magasságát, akkor a kifeszült léggömb belsejében lévő nyomás hozzávetőlegesen a külső légnyomással egyezzen meg. A tengerszinten a léggömb térfogata a kifeszült állapotbeli térfogat 10%-a.

a) Milyen magasra emelkedik a léggömb, ha durva közelítésként feltesszük, hogy a teljes emelkedési tartományban 250 K-es hőmérséklet uralkodik?

b) Mekkora hasznos terhet tud feljuttatni a kifeszült állapotában $1000\,\mathrm{m}^3$-es léggömb, ha a léggömb köpenyének és kosarának együttes tömege 51,6 kg?

Útmutatás: A tengerszinten 101 kPa a nyomás, ami a magasság függvényében 5,5 km-enként feleződik. A hélium moláris tömege 4 g/mol, a levegő moláris tömege 29 g/mol.

Megoldás

a) Ha a léggömbben lévő hélium izotermikusan 10-szeresére tágul, akkor a benne lévő nyomás tizedére csökken. Mivel a légnyomás 5,5 km-enként feleződik, így a z végleges emelkedési magasságot a következőképpen számíthatjuk ki:

$$p = \frac{p_0}{10} = p_0 2^{-\frac{z}{5{,}5\,\mathrm{km}}},$$

amiből

$$\lg 0{,}1 = -\frac{z}{5{,}5\,\mathrm{km}} \lg 2, \quad \to \quad z = 5{,}5\,\mathrm{km} \cdot \frac{1}{\lg 2} \approx 18{,}3\,\mathrm{km}.$$

b) A levegő és a hélium sűrűségét a tengerszinten így számíthatjuk ki:

$$pV = nRT = \frac{m}{M}RT, \quad \to \quad \varrho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT},$$

amiből a levegő sűrűségére $1{,}41\,\mathrm{kg/m^3}$, míg a héliumra $0{,}194\,\mathrm{kg/m^3}$ adódik. A maximális magasság elérésekor a levegő sűrűsége is, és a hélium sűrűsége is tizedére csökken. A maximális magasságban a felhajtóerő megegyezik a léggömb súlyával:

$$mg = \frac{\varrho_{\mathrm{lev}}}{10} Vg, \quad \to \quad m = \frac{\varrho_{\mathrm{lev}}}{10} V = 141\,\mathrm{kg},$$

amibe beleszámítottuk a hélium és a léggömb köpenyének, illetve kosarának a súlyát is. A hélium tömege 19,4 kg, a köpeny és a kosár tömege 51,6 kg, tehát a hasznos teher 70 kg.

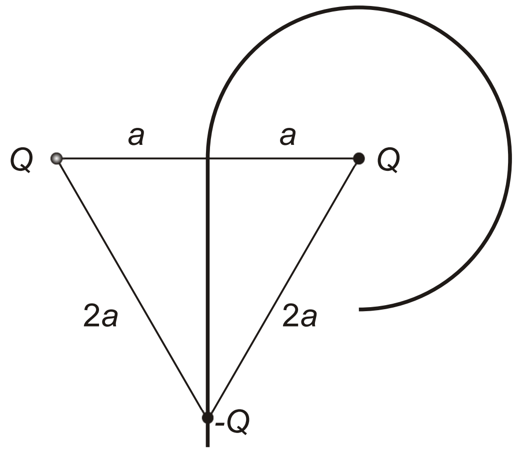
4. feladat

Vízszintes síkban, egymástól $2a = 30\,\mathrm{cm}$ távolságra van két rögzített, $Q = 2 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{C}$ töltésű, pontszerűnek tekinthető test. Egy kicsiny, $m = 1{,}2\,\mathrm{g}$ tömegű, $(-Q)$ töltésű gyöngyszem az ábrán látható, rögzített, vékony, merev, vízszintes síkú, hajlított szigetelőszálon súrlódásmentesen tud csúszni. A szál egy egyenes szakaszból és egy a sugarú, háromnegyed körívből áll. A kör középpontja az egyik töltés. Az egyenes szakasz a két pozitív töltés felezőmerőlegesére illeszkedik, és a két töltés felezőpontjánál csatlakozik a körívhez. A pozitív töltésektől $2a$ távolságban, álló helyzetben lévő gyöngyöt elengedjük.

a) Mekkora lesz a gyöngy legnagyobb sebessége a szigetelőszálon?

b) Mekkora lesz a gyöngy legkisebb sebessége a köríven?

c) Semlegesítjük valamennyi testet, és a gyöngyöt két egyforma, nyújtatlanul a hosszúságú gumiszállal kapcsoljuk a másik két rögzített testhez. Mekkora legyen a gumiszál rugalmassági állandója (direkciós ereje), hogy a gyöngy legnagyobb sebessége megegyezzen az *a)* esetbeli maximális sebességgel? Mekkora lesz a gyöngy legkisebb sebessége?



Megoldás

a) A gyöngy mozgási energiájának és elektromos potenciális energiájának összege a mozgás során állandó:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \left(-\frac{kQ^2}{r_1} - \frac{kQ^2}{r_2}\right),$$

ahol r_1, illetve r_2 a gyöngy rögzített töltésektől mért távolsága. A sebesség tehát akkor maximális, ha a potenciális energia minimális. Ez $r_1 = r_2 = a$ esetén következik be. (Ezt abból is láthatjuk, hogy az eredő erő a két töltés felezőpontjának eléréséig a sebességgel egyirányú, majd azt követően a pályamenti összetevő a sebességgel ellentétes.)

$$\left(-2\frac{kQ^2}{2a}\right) = \frac{1}{2}mv^2 + \left(-2\frac{kQ^2}{a}\right),$$

vagyis

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{kQ^2}{a},$$

amiből

$$v = Q\sqrt{\frac{2k}{ma}} = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

b) A gyöngy sebessége akkor minimális, ha a potenciális energia maximális. Ez $r_1 = 3a$ és $r_2 = a$ esetén következik be. (Ezt onnan is láthatjuk, hogy eddig a pontig a gyöngyre ható érintőirányú erő a sebességgel ellentétes. Az említett pontban az érintőirányú erő nullává válik, majd továbbhaladva a sebességgel azonos irányba mutat. Feltettük, hogy a gyöngy eljut eddig a pontig.) Legyen a minimális sebesség u.

$$\left(-2\frac{kQ^2}{2a}\right) = \frac{1}{2}mu^2 + \left(-\frac{kQ^2}{3a} - \frac{kQ^2}{a}\right),$$

tehát

$$\frac{1}{2}mu^2 = \frac{kQ^2}{3a}$$

és így

$$u = Q\sqrt{\frac{2k}{3ma}} = \frac{v}{\sqrt{3}} = 1{,}15\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Megjegyzés: A gyöngy akkor érné el az *a)* pontban szereplő maximális sebességet újra, ha a körív teljes kör lenne, tehát a gyöngy újra eljutna a két töltés felezőpontjába.

c) A mozgási energia és a rugalmas energiák összegének

$$E' = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Dx_1^2 + \frac{1}{2}Dx_2^2$$

állandósága miatt a sebesség maximális, ha a két gumiszál energiájának összege minimális. A kifejezésben x_1 és x_2 az egyes gumiszálak megnyúlása. Ez $x_1 = x_2 = 0$ esetén következik be, tehát

$$2 \cdot \frac{1}{2}Da^2 = \frac{1}{2}mv^2,$$

mivel kezdetben a megnyúlás $x = a$. Ebből

$$D = \frac{mv^2}{2a^2} = \frac{kQ^2}{a^3} = 0{,}107\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}.$$

A sebesség minimális, ha a két gumiszál energiájának összege maximális. Kezdetben az összes energia Da^2 volt. A köríven haladva az egyik gumiszál energiája nulla, a másiké maximális, ha a két gumiszál egybeesik, ekkor a másik gumi megnyúlása $2a$, energiája $D(2a)^2/2 = 2Da^2 > Da^2$, ami nem lehetséges. Ebből az következik, hogy a gyöngy már korábban megáll, tehát a minimális sebesség ebben az esetben nulla.

Értékelési útmutató

1. feladat

Annak észrevétele, hogy a talajon hová kell érkeznie a golyónak, hogy végbemenjen a folyamat:	4 pont
A függőleges és vízszintes mozgásvetületek függetlenségének felismerése és felhasználása:	4 pont
A kezdősebesség nagyságának meghatározása bármely módszerrel:	6 pont
Az indítás irányának meghatározása:	6 pont
Összesen:	**20 pont**

2. feladat

Az ütközéskori sebesség meghatározása:	1 pont
Annak észrevétele, hogy az ütközés pillanatában a tömegközéppont egy pillanatra megáll:	4 pont
A zuhanó golyók közötti fonálerő meghatározása:	3 pont
A golyópár szögsebességének meghatározása:	2 pont
A keresett talaj-kőpárkány távolság és a mozgás paraméterei közötti kapcsolat meghatározása:	4 pont
A keresett talaj-kőpárkány távolság numerikus értékének helyes megadása:	4 pont
A két golyó pillanatnyi sebességének megadása a kérdéses pillanatban:	2 pont
Összesen:	**20 pont**

3. feladat

a)	Elméleti számítás:	8 pont
	Numerikus eredmény:	2 pont
b)	Gáztörvény felírása:	4 pont
	Erőegyensúly felírása:	4 pont
	Numerikus eredmény:	2 pont
	Összesen:	**20 pont**

4. feladat

a)	Sebesség maximumának feltétele:	2 pont
	Energiaegyenlet helyes felírása:	3 pont
	Sebesség maximumának kiszámítása:	2 pont
b)	Sebesség minimumának feltétele:	2 pont
	Energiaegyenlet helyes felírása:	3 pont
	Sebesség minimumának kiszámítása:	2 pont
c)	Sebesség maximumának feltétele:	1 pont
	Energiaegyenlet helyes felírása:	2 pont
	Rugalmassági állandó kiszámítása:	1 pont
	Sebesség minimumának feltétele:	1 pont
	Sebesség minimumának megadása:	1 pont
	Összesen:	**20 pont**

A megoldásban vázoltaktól eltérő számításokra, amelyek elvileg helyesek és helyes végeredményre vezetnek, az alkérdésekre adható teljes pontszám jár.