OKTATÁSI HIVATAL

A 2020/2021. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
első forduló

FIZIKA I. KATEGÓRIA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

A versenyzők figyelmét felhívjuk arra, hogy áttekinthetően és olvashatóan dolgozzanak. Amennyiben áttekinthetetlen és olvashatatlan részek vannak a dolgozatban, azok az értékelés szempontjából figyelmen kívül maradnak.

1. feladat

Egy patak vízéből a partra merőleges egyenes mentén, egyenlő távolságonként azonos magasságú pálcák állnak ki. Egy szöcske minimális energiabefektetéssel kíván átkelni a patakon. Az egyik alkalommal a szöcske minden egyes ugrás során a szomszédos pálcára ugrik, másik esetben pedig minden egyes ugrásnál a másodikra. A szöcske a pálcákra érkezéskor elveszíti azt a mechanikai energiáját, amit elrugaszkodáskor szerzett.

a) Melyik esetben végez kevesebb munkát a szöcske?

b) Adjuk meg a két átkelési idő hányadosát! (Hanyagoljuk el azt az időt, amit a szöcske ugrándozása közben az egyes pálcák tetején tölt el.)

Megoldás

A szöcske a ferde hajításnak megfelelő mozgást végez minden ugrás során. Ismert a hajítás távolságára vonatkozó összefüggés:

$$s = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g}.$$

Ez azt is jelenti, hogy a szöcskre adott távolságra a legkisebb energiával (legkisebb sebességgel) akkor ugrik, ha $\sin 2\alpha$ maximális. A 45°-os elrugaszkodás igényli a legkisebb indulási sebességet. Ekkor a hajítás távolsága

$$x = \frac{v_0^2}{g}.$$

a) Amikor a szöcske egyesével ugrál, akkor $2x$ távolság megtétele során kétszer rugaszkodik el, így a befektetett energia:

$$E_1 = 2 \cdot \frac{1}{2} m v_0^2 = mxg.$$

Amikor kettesével ugrál a szöcske, akkor a $2x$ távolság megtétele során egyszer rugaszkodik el, így a befektetett energia:

$$E_2 = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m 2xg = mxg.$$

Mindkét módon ugyanakkora munkát végez a szöcske.

b) Az első esetben legyen az elrugaszkodás sebessége v_0. A kétszer nagyobb távolságot áthidaló ugrás sebessége $\sqrt{2}v_0$. Az átkelési idő fordítottan arányos az elrugaszkodás sebességével:

$$t = \frac{s}{v_0 \cos\alpha},$$

ahol s a patak szélessége. A két átkelési idő hányadosa

$$\frac{t_1}{t_2} = \sqrt{2}.$$

2. feladat

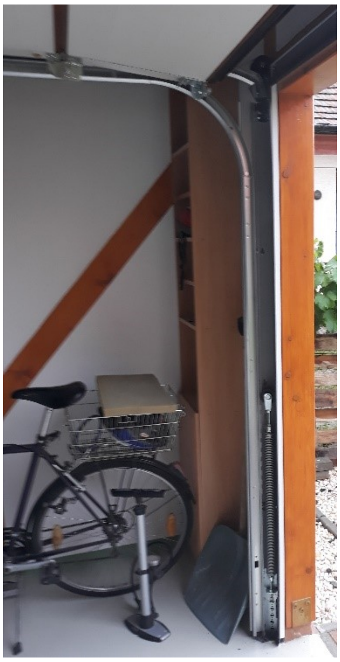
Az alábbi képen egy úgynevezett szekcionált garázskapu vázlata látható. A kapu redőnyszerűen mozgó lemezekből áll, melyek teljes tömege 75 kg. Nyitáskor a függőleges lemezek 2,2 m magasra kerülnek, és vízszintes helyzetet vesznek fel. A kapu nyitása 10 s alatt megtörténik. A feladatban a kapu felgyorsulásának és lelassulásának a hatását hanyagoljuk el.

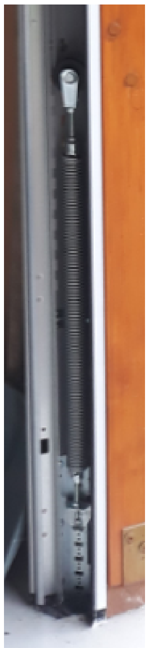
(A kép forrása: https://www.ablaknet.hu/images/siteimg/garazskapuk/roma/silento.jpg)

a) Mekkora a kapu nyitásához szükséges átlagos mechanikai teljesítmény? (Tekintsünk el a súrlódástól.)

b) Hogyan változik a kapu nyitásakor a lemezek emeléséhez szükséges mechanikai teljesítmény a kapu pillanatnyi függőleges hosszának függvényében? (Tekintsünk el a súrlódástól.)

A kapu nyitását, vagyis a lemezek felhúzását egy meglehetősen kicsiny motor végzi, amelynek felvett teljesítménye nem éri el az előzőekben kiszámított átlagos értéket sem. Ez úgy lehetséges, hogy a kapu két oldalán, a függőleges vezetősínekben drótkötelek, valamint álló és mozgócsigák segítségével egy-egy erős rugó segíti a műveletet. Felhúzott állapotban a rugók nyújtatlanok, és hosszúságuk 0,6 m (ezt a helyzetet mutatja az alábbi fénykép és kinagyított részlete). Leengedés közben a rugók 1,7 m hosszúra nyúlnak, és maximális megnyúláskor a lemezek súlyának 90%-át biztosítják. (A rugók felső végéhez mozgócsiga csatlakozik, amin az átvezetett drótkötél egyik szára felül a kapu tartószerkezetéhez rögzített, míg a másik szára a kapu lemezeit emeli mindkét rugó esetében.)





c) Mekkora a rugóállandó?

d) Becsüljük meg, hogy legalább mekkora legyen a kaput működtető motor teljesítménye, ha feltételezzük, hogy a súrlódás leküzdéséhez 10 W teljesítmény szükséges!

Megoldás

a) Adatok: $m = 75\,\mathrm{kg}$, $h = 2{,}2\,\mathrm{m}$, $t = 10\,\mathrm{s}$, $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$.
Az emeléshez szükséges átlagos teljesítmény:

$$P_{\text{átl.}} = \frac{mgh/2}{t} \approx 81\,\mathrm{W}.$$

b) A mechanikai teljesítményt a $P = Fv$ összefüggés alapján számíthatjuk ki, ahol az erő mindig a kapu pillanatnyi függőleges részének x hosszával arányos és $v = h/t$ a kapu sebessége:

$$P = Fv = \left(mg\frac{x}{h}\right)v = mgv\frac{x}{h} \approx (162\,\mathrm{W}) \cdot \frac{x}{h}.$$

Láthatjuk, hogy az emelés kezdetén ($x = h$) a teljesítmény a legnagyobb, míg az emelés végén nullához tart, valamint az átlagos értéke a maximum fele.

c) A rugóállandót úgy tudjuk meghatározni, hogy figyelembe vesszük a 90%-os adatot. A mozgócsiga miatt a drótkötelekben ható erő csak fele a rugóerőnek, de két rugó is segíti az emelést:

$$0{,}9mg = Dy_{\max} \quad \to \quad D = \frac{0{,}9\,mg}{y_{\max}} \approx 600\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}.$$

A fenti számolásban D egyetlen rugó rugóállandóját, $y_{\max}$ pedig az egyes rugók maximális megnyúlását jelenti:

$$y_{\max} = 1{,}7\,\mathrm{m} - 0{,}6\,\mathrm{m} = 1{,}1\,\mathrm{m}.$$

d) Vegyük észre, hogy miközben a kapu 2,2 m magasra emelkedik, addig a rugó alakváltozása (a mozgócsiga miatt) csak feleakkora, azonban a drótkötél végének az elmozdulása megegyezik a kapu aljának elmozdulásával (hiszen oda van rögzítve). A rugók emelést segítő teljesítményét is a $P = Fv$ összefüggés alapján számíthatjuk ki, ahol $F = Dy$, mert ugyan két rugó van, de a mozgócsiga miatt feleződik az erő:

$$P_{\text{rugó}} = Dyv = \frac{x}{2}Dv = \frac{x}{2}\frac{0{,}9\,mg}{y_{\max}}v = 0{,}9\,mgv\frac{x}{h} \approx (146\,\mathrm{W})\frac{x}{h}.$$

A motor teljesítményét így kaphatjuk meg:

$$P_{\text{motor}} = P - P_{\text{rugó}} + P_{\text{súrl.}} = mgv\frac{x}{h} - 0{,}9\,mgv\frac{x}{h} + P_{\text{súrl.}} = 0{,}1\,mgv\frac{x}{h} + P_{\text{súrl.}} =$$

$$= (16{,}2\,\mathrm{W})\frac{x}{h} + 10\,\mathrm{W},$$

ami azt jelenti, hogy elegendő, ha a motor teljesítménye 10 W és 26,2 W között változik, vagyis a kaput működtető motornak 30 W-nál biztosan nem kell nagyobb teljesítményűnek lennie. A rugó munkája gyakorlatilag teljesen kompenzálja a lemezek emeléséhez szükséges munkát.

Megjegyzés: A rugó beiktatása teszi lehetővé, hogy a mostani kapuk már igen gyorsan nyílnak és csukódnak.

3. feladat

Az ábrán látható zárt henger szimmetriatengelye vízszintes, ekkor a 2 cm vastagságú, súrlódásmentesen mozgó dugattyú által elzárt két térfél térfogata 12, illetve 10 liter. Mindkét térfélben 23,15 kPa nyomású gáz van. A henger alkotóira merőleges vízszintes tengely körül lassan elforgatjuk a hengert az egyik irányba 90°-kal, így a két térfél azonos térfogatúvá válik. A henger és a dugattyú is jó hővezető anyagból készült. (Számoljunk $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$-tel.)

a) Milyen anyagból készülhetett a dugattyú?

b) Mekkora lesz a két térfél térfogata, ha a másik irányba forgatjuk el a hengert 90°-kal?

Megoldás

a) A jó hővezető anyagból készült, zárt henger lassú mozgatása miatt mindkét térfélben lévő gáz izotermikus állapotváltozáson megy keresztül. Alkalmazzuk a Boyle–Mariotte-törvényt az első folyamatra mindkét gázra, majd fejezzük ki a két térfélben lévő gáz új nyomását ($p_0 = 23{,}15\,\mathrm{kPa}$):

$$p_0 \cdot \left(10\,\mathrm{dm}^3\right) = p_1 \cdot \left(11\,\mathrm{dm}^3\right) \quad \rightarrow \quad p_1 = \frac{10}{11} p_0 = 21{,}0\,\mathrm{kPa},$$

$$p_0 \cdot \left(12\,\mathrm{dm}^3\right) = p_2 \cdot \left(11\,\mathrm{dm}^3\right) \quad \rightarrow \quad p_2 = \frac{12}{11} p_0 = 25{,}3\,\mathrm{kPa}.$$

A henger függőleges helyzetében írjuk fel a dugattyú egyensúlyának feltételét (d a dugattyú vastagsága):

$$\sum \mathbf{F} = 0,$$

$$p_1 A + mg = p_2 A, \quad \rightarrow \quad mg = (p_2 - p_1)A.$$

$$\varrho A d g = \frac{2}{11} p_0 A, \quad \rightarrow \quad \varrho = \frac{2}{11} \cdot \frac{p_0}{dg}.$$

A behelyettesítést követően:

$$\varrho = 21{,}5 \cdot 10^3\, \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}.$$

A függvénytáblázat sűrűségadatai alapján megállapíthatjuk, hogy a dugattyú platinából lehet.

b) Most a hengert vízszintes helyzetből a másik irányba forgassuk el 90°-kal. Ismét alkalmazzuk a Boyle–Mariotte-törvényt a folyamatra mindkét gázra, majd fejezzük ki mindkét térfélben a gáz új nyomását:

$$p_0 \cdot \left(12\,\mathrm{dm}^3\right) = p_3 \cdot x \quad \rightarrow \quad p_3 = \frac{12\,\mathrm{dm}^3}{x}\, p_0,$$

$$p_0 \cdot \left(10\,\mathrm{dm}^3\right) = p_4 \cdot \left(22\,\mathrm{dm}^3 - x\right) \quad \rightarrow \quad p_4 = \frac{10\,\mathrm{dm}^3}{22\,\mathrm{dm}^3 - x}\, p_0.$$

A henger új függőleges helyzetében ismét írjuk fel a dugattyú egyensúlyának feltételét:

$$\sum \mathbf{F} = 0,$$

$$p_3 A + mg = p_4 A.$$

Helyettesítsük ebbe az egyenletbe az imént kapott új nyomásértékeket és mg értékét az a) részből:

$$\frac{12\,\mathrm{dm}^3}{x}\, p_0 A + \frac{2}{11}\, p_0 A = \frac{10\,\mathrm{dm}^3}{22\,\mathrm{dm}^3 - x}\, p_0 A.$$

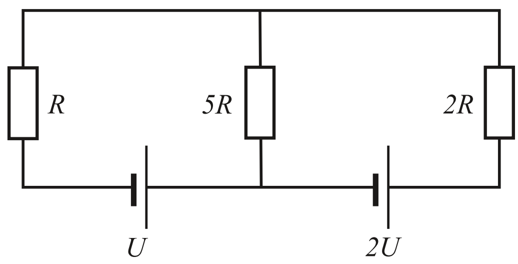
Az egyszerűsítések és a rendezés után a következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$$x^2 + 99x - 1452 = 0.$$

Az egyenletet megoldva egy pozitív megoldás adódik: 12,97. Így most az átforgatás után a felső térfél térfogata 12,97 liter, alsóé 9,03 liter. Érdekes, hogy ez az eredmény nem függ sem a kezdeti nyomástól, sem a dugattyú felületének méretétől.

4. feladat

Mekkora az ábrán látható áramkörben az $5R$ ellenálláson átfolyó áram erőssége?

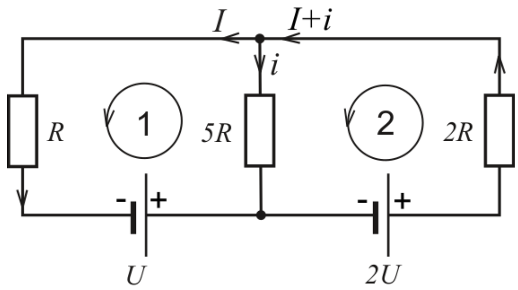


Megoldás

Mivel az ábra jobb oldalán az ellenállás is, és a telepfeszültség is duplája a bal oldali értékeknek, így jogosan merülhet fel bennünk, hátha éppen nulla feszültség jut az $5R$ ellenállásra. Ezért vizsgáljuk meg, mi a helyzet, ha az $5R$ ellenálláson nem folyna áram. Ekkor az áramkörben $I = 3U/3R = U/R$ erősségű áram folyna. Vagyis az R ellenálláson U, a $2R$ ellenálláson $2U$ feszültség esne.

Mivel az egyes hurkokban teljesül a huroktörvény, azaz nem jutottunk ellentmondásra a nulla áram feltételezésével, valamint csak egyféle megoldás létezik (nem mérhetünk kétféle áramot az $5R$ ellenálláson), ezért valóban nem folyik áram az $5R$ (vagy bármekkora más ide bekötött) ellenálláson.

A feladatot a „nyers erő” módszerével is megoldhatjuk.



A huroktörvény a két hurokra:

$$\begin{aligned} RI - 5Ri - U &= 0, \\ 2R(I+i) + 5Ri - 2U &= 0. \end{aligned}$$

Összevonás és átrendezés után kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} U + 5Ri - RI &= 0, \\ 2U - 7Ri - 2RI &= 0. \end{aligned}$$

Kivonva a második egyenletből az első kétszeresét, $i = 0$ eredmény adódik, vagyis a középső ágban nem folyik áram.

Értékelési útmutató

1. feladat

a)	Annak felismerése, hogy a szöcske mozgása ferde hajítás:	2 pont
	Annak megállapítása, hogy adott kezdősebesség mellett legtávolabbra 45 fokos elrugaszkodás tartozik (ez azt is jelenti, hogy adott távolságra a legkisebb sebességű ugrás 45 fokos):	2 pont
	Egy optimális távolság felírása paraméteresen:	2 pont
	A befektetett energia felírása az egyik alkalomra:	2 pont
	A befektetett energia felírása a másik alkalomra:	2 pont
	Annak megállapítása, hogy a két alkalommal befektetett munka egyenlő:	2 pont
b)	Az elrugaszkodási sebességek arányának megállapítása:	3 pont
	Annak megállapítása, hogy az átkelési idő fordítottan arányos az elrugaszkodás sebességével:	3 pont
	A két átkelési idő hányadosának megadása:	2 pont
	Összesen:	**20 pont**

2. feladat

a)	Az emeléshez szükséges átlagos teljesítmény meghatározása:	2 pont
b)	Az emeléséhez szükséges mechanikai teljesítmény a pillanatnyi hossz függvényében:	5 pont
c)	A rugóállandó meghatározása:	3 pont
d)	A motor minimális teljesítménye:	10 pont
	Összesen:	**20 pont**

3. feladat

a)	Annak felismerése, hogy a gázokkal izotermikus állapotváltozás történik:	2 pont
	A két térfél nyomásának felírása (kiszámolása) az új helyzetben a Boyle–Mariotte-törvény segítségével:	2 pont
	A dugattyú egyensúlyának megfogalmazása:	2 pont
	A dugattyú sűrűségének megadása:	2 pont
	A dugattyú lehetséges anyagának megadása:	2 pont
b)	A két térfél nyomásának felírása (kiszámolása) az újabb helyzetben a Boyle–Mariotte-törvény segítségével:	2 pont
	A dugattyú egyensúlyának megfogalmazása:	2 pont
	Az egyik térfél térfogatára vonatkozó másodfokú egyenlet felírása:	2 pont
	Az egyenlet megoldása:	2 pont
	Az újabb helyzetben a két térfél térfogatának megadása:	2 pont
	Összesen:	**20 pont**

4. feladat

A csomóponti törvények helyes alkalmazása:	2+2 pont
A huroktörvények helyes alkalmazása:	5+5 pont
A középső ágban nem folyik áram:	6 pont
Összesen:	**20 pont**

A 4. feladatban az intuitív megoldásra, amennyiban az helyes, szintén 20 pont adható.

A megoldásban vázoltaktól eltérő számításokra, amelyek elvileg helyesek és helyes végeredményre vezetnek, az alkérdésekre adható teljes pontszám jár.