Language: Hungarian

7. Közép-Európai Matematikai Olimpia

Egyéni verseny

2013. augusztus 24.

I-1. feladat Az a, b, c pozitív valós számok teljesítik a következő egyenlőséget:

$$a + b + c = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Bizonyítsd be, hogy:

$$2(a + b + c) \geq \sqrt[3]{7a^2b + 1} + \sqrt[3]{7b^2c + 1} + \sqrt[3]{7c^2a + 1}.$$

Határozd meg mindazokat az (a, b, c) számhármasokat, melyekre egyenlőség áll fenn.

I-2. feladat Legyen n egy pozitív egész szám. Egy $4n \times 4n$ méretű sakktáblán pontosan $4n$ bábu áll úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban pontosan egy bábu található. Egy lépésben az egyik bábut az egyik függőlegesen vagy vízszintesen szomszédos mezőre mozgathatjuk. Egyszerre több bábu is kerülhet így egy mezőre. Célunk az, hogy a bábuk végül a sakktábla két főátlója közül az egyiket foglalják el.

Határozd meg a legkisebb $k(n)$ számot, amelyre teljesül, hogy tetszőleges megengedett kezdőhelyzetből, legfeljebb $k(n)$ lépéssel elérhetjük a célunkat.

I-3. feladat Az ABC egyenlőszárú háromszögben $AC = BC$. Legyen N a háromszög egy olyan belső pontja, amelyre teljesül, hogy $2ANB\angle = 180° + ACB\angle$. A BN egyenes és a C-n átmenő, AN-nel párhuzamos egyenes metszéspontját jelölje D. Legyen továbbá P a $CAN\angle$ és az $ABN\angle$ szögek belső szögfelezőinek metszéspontja.

Bizonyítsd be, hogy a DP és az AN egyenesek merőlegesek.

I-4. feladat Legyenek a és b tetszőleges pozitív egészek. Bizonyítsuk be, hogy léteznek olyan x és y pozitív egészek, melyekre teljesül, hogy:

$$\binom{x + y}{2} = ax + by.$$

A feladatok megoldására 5 óra áll rendelkezésre.
Kérdéseket csak az első 60 percben lehet feltenni.
Minden feladat 8 pontot ér.
A feladatok nem nehézségi sorrendben vannak.