T–1. Feladat

Határozzátok meg a

$$\left(\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}\right)\left(\frac{a^2}{a^2+1}+\frac{b^2}{b^2+1}+\frac{c^2}{c^2+1}\right)$$

kifejezés lehető legkisebb és lehető legnagyobb értéket, ahol a, b és c nem-negatív valós számok, melyekre $ab+bc+ca=1$.

T–2. Feladat

Legyen α egy valós szám. Határozzátok meg az összes valós együtthatós P polinomot, amelyre

$$P(2x+\alpha) \leq (x^{20}+x^{19})\, P(x)$$

teljesül minden x valós számra.

T–3. Feladat

Egy osztályba n fiú és n lány jár, ahol n egy pozitív egész szám. Az osztályba járó gyerekek magasságai mind különböznek. Minden lány meghatározza a nála magasabb fiúk számát, kivonja belőle a nála magasabb lányok számát, és az eredményt leírja egy papírra. Minden fiú meghatározza a nála alacsonyabb lányok számát, kivonja belőle a nála alacsonyabb fiúk számát, és az eredményt leírja egy papírra. Bizonyítsátok be, hogy a lányok által leírt számok – a sorrendjüktől eltekintve – ugyanazok, mint a fiúk által leírt számok.

T–4. Feladat

Bizonyítsátok be, hogy 1-től 2019-ig bármely egész számot fel lehet írni egy olyan kifejezésként, amely legfeljebb 17 darab 2-esből, és tetszőleges számú összeadásból, kivonásból, szorzásból, osztásból és zárójelből áll. A 2-eseket semmilyen más műveletre nem lehet használni, vagyis például nem lehet többjegyű számokat (mint a 222) vagy hatványokat (mint a 2^2) képezni.

Néhány lehetséges példa:

$$\left((2\times 2+2)\times 2-\frac{2}{2}\right)\times 2=22,\quad (2\times 2\times 2-2)\times\left(2\times 2+\frac{2+2+2}{2}\right)=42.$$

A feladatok megoldására 5 óra áll rendelkezésre.
Kérdéseket csak az első 60 percben lehet feltenni.
Minden feladat 8 pontot ér.
A feladatok nem nehézségi sorrendben vannak.

T–5. Feladat

Legyen ABC egy hegyesszögű háromszög, melyre $AB < AC$. A BC oldalfelező merőlegese messe az AC oldalt a D pontban. Legyen P egy olyan pont az ABC háromszög körülírt körének rövidebbik AC ívén, melyre $DP \parallel BC$. Végül legyen M az AB oldal felezőpontja. Bizonyítsátok be, hogy $APD\sphericalangle = MPB\sphericalangle$.

T–6. Feladat

Legyen ABC egy olyan derékszögű háromszög, melynek a derékszöge a B csúcsánál van és a körülírt köre c. Jelölje D a c kör rövidebb AB ívének felezőpontját. Legyen P az AB oldal azon pontja, melyre $CP = CD$, és legyen X és Y két különböző pont a c körön, melyekre $AX = AY = PD$. Bizonyítsátok be, hogy X, Y és P egy egyenesre illeszkedik.

T–7. Feladat

Legyenek a, b és c olyan pozitív egész számok, melyekre $a < b < c < a+b$ teljesül. Bizonyítsátok be, hogy $c(a-1)+b$ nem osztja a $c(b-1)+a$ számot.

T–8. Feladat

Legyen N olyan pozitív egész szám, melynek a pozitív osztóinak négyzetösszege egyenlő az $N(N+3)$ szorzattal. Bizonyítsátok be, hogy léteznek i és j indexek úgy, hogy $N = F_i \cdot F_j$, ahol $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ a Fibonacci-sorozat, melynek definíciója: $F_1 = F_2 = 1$ és $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ minden $n \geq 3$ esetén.