T–1. Feladat

Határozzátok meg az összes $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, melyre az

$$f(x^2) - f(y^2) \leqslant (f(x) + y)(x - f(y))$$

egyenlőtlenség fennáll minden x és y valós szám esetén.

T–2. Feladat

Adott egy n pozitív egész szám. Azt mondjuk, hogy egy $P(x)$ valós együtthatós polinom n-*szép*, ha a $P(\lfloor x \rfloor) = \lfloor P(x) \rfloor$ egyenletnek pontosan n megoldása van a valós számok körében. Bizonyítsátok be, hogy minden n pozitív egész esetén

(a) létezik egy n-szép polinom.

(b) minden n-szép polinom foka legalább $\frac{2n+1}{3}$.

(*Megjegyzés:* Egy x valós szám esetén $\lfloor x \rfloor$ a legnagyobb x-nél nem nagyobb egész számot jelöli.)

T–3. Feladat

Legyenek n, b és c pozitív egészek. n kalóz igazságosan szét akarja osztani a kincset. A kincs $c \cdot n$ egyforma tallérból áll, és $b \cdot n$ egyforma erszénybe van szétosztva úgy, hogy kezdetben legalább $n-1$ erszény üres. Jack kapitány szabadon megvizsgálhatja az erszények tartalmát, majd lépések sorozatát végzi. Egy lépésben akárhány tallért áthelyezhet egy erszényből egy üres erszénybe. Bizonyítsátok be, hogy akárhogyan is helyezkednek el kezdetben a tallérok az erszényekben, Jack el tudja érni legfeljebb $n-1$ lépéssel, hogy utána szét lehessen osztani az erszényeket a kalózok között úgy, hogy mindenki b erszényt és c tallért kapjon.

T–4. Feladat

Legyen n pozitív egész szám. Bizonyítsátok be, hogy egy szabályos $6n$-szögben be tudunk húzni $3n$ átlót, melyeknek nincs közös végpontja, és n darab hármas csoportba lehet osztani ezeket az átlókat úgy, hogy

- minden hármas csoportban a három átló a sokszög egy belső pontjában metszi egymást, és
- ez az n metszéspont mind különböző.

T–5. Feladat

Legyen AD átmérő az ABC hegyesszögű háromszög köréírt körében. A D-n keresztül AB-vel, illetve AC-vel húzott párhuzamos egyenesek az AC, illetve AB egyeneseket rendre az E, illetve F pontokban metszik. Legyen G az EF és BC egyenesek metszéspontja. Bizonyítsátok be, hogy AD és DG merőleges.

T–6. Feladat

Legyen ABC egy háromszög és M a BC szakasz felezőpontja. Az X pont az AB félegyenesen fekszik úgy, hogy $2CXA\sphericalangle = CMA\sphericalangle$. Az Y pont az AC félegyenesen fekszik úgy, hogy $2AYB\sphericalangle = AMB\sphericalangle$. A BC egyenes az AXY háromszög köréírt körét a P és Q pontokban metszi úgy, hogy P, B, C és Q ilyen sorrendben vannak a BC egyenesen. Bizonyítsátok be, hogy $PB = QC$.

T–7. Feladat

Találjátok meg az összes (n, p) pozitív egészekből álló párt, melyre p prímszám és

$$1 + 2 + \cdots + n = 3 \cdot (1^2 + 2^2 + \cdots + p^2).$$

T–8. Feladat

Bizonyítsátok be, hogy végtelen sok olyan n pozitív egész létezik, melyre az n^2 négyes számrendszerben felírt alakja csak 1 és 2 számjegyeket tartalmaz.

A feladatok megoldására 5 óra áll rendelkezésre.
Kérdéseket csak az első 60 percben lehet feltenni.
Minden feladat 8 pontot ér.
A feladatok nem nehézségi sorrendben vannak.