I–1. Feladat

Határozd meg az összes olyan $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, melyre

$$f(x + yf(x + y)) = f(x)f(y) + y^2$$

teljesül minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén.

I–2. Feladat

Egy $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ véges sorozat *keverékhalmaza* az az $M(A)$ halmaz, melynek elemei a szomszédos tagokból álló nemüres blokkok összegei, azaz

$$M(A) = \{a_i + a_{i+1} + \cdots + a_j \mid 1 \leq i \leq j \leq n\}.$$

Például az $A = (2, 3, 2)$ sorozat keverékhalmaza $M(A) = \{2, 3, 5, 7\}$.

Adott $n \geq 1$ esetén jelölje $k(n)$ a legkisebb olyan értéket, melyre léteznek pozitív egészekből álló $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ és $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ véges sorozatok, hogy az $M(A)$ és $M(B)$ keverékhalmazok diszjunktak, és

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = k(n).$$

Határozd meg $k(n)$ értékét minden $n \geq 1$ esetén.

I–3. Feladat

Legyen ABC egy hegyesszögű háromszög, amelyben $AB < AC$, és legyen O a körülírt körének középpontja. Legyenek P és Q olyan pontok az A-n átmenő, BC-re merőleges egyenesen, melyekre $PA = PB$ és $QA = QC$ teljesül. A PQ és BC szakaszok felezőpontjait jelölje rendre M és N. Legyen $R \neq A$ a második metszéspontja az AN egyenesnek és az ABC háromszög körülírt körének. Bizonyítsd be, hogy a BC, MO és NR szakaszok felezőmerőlegesei egy ponton mennek át.

I–4. Feladat

Legyen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ egy pozitív racionális számokból álló végtelen sorozat úgy, hogy minden $n \geq 1$ esetén $a_{n+1} = \frac{p_n+1}{q_n+1}$, ahol $\frac{p_n}{q_n}$ az a_n szám legegyszerűbb alakja. Határozd meg a_1 összes lehetséges értékét, melyre létezik olyan k pozitív egész, hogy az $a_1 a_2 \cdots a_k$ szorzat egész.

Megjegyzés: Egy r pozitív racionális szám legegyszerűbb alakja az az egyértelmű $r = \frac{p}{q}$ felírás, melyben p és q relatív prím pozitív egészek.