T–1. Feladat

Határozzátok meg az összes olyan $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, amelyre teljesül az alábbi egyenlőtlenség minden valós x, y, z esetén:

$$f(x)f(y+z) \geq x(f(y)+f(z)).$$

T–2. Feladat

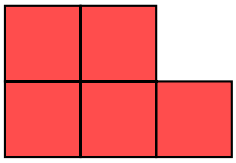
Határozzátok meg az összes olyan q pozitív racionális számot, amelyre léteznek olyan a, b, c és n pozitív egészek, hogy az alábbi két egyenlőség teljesül:

$$a+b+c = qn,$$
$$ab+c = n^2.$$

T–3. Feladat

Adott egy fehér mezőkből álló végtelen négyzetrács. Legyen n egy pozitív egész szám. Marvin $4n+1$ mezőt pirosra színezett úgy, hogy mind a piros mezők alkotta R halmaz, mind pedig a fehér mezők alkotta W halmaz összefüggő.

A keletkezett piros alakzat egy k-szög. Például az alábbi 5 piros mező egy 6-szöget alkot.



Határozzátok meg k lehetséges legnagyobb értékét n függvényében.

Megjegyzés: A mezők egy S halmazát *összefüggőnek* nevezzük, ha bármely két $a, b \in S$ mezőhöz létezik olyan $m \geq 1$ egész szám, és léteznek olyan $c_1, c_2, \ldots, c_m \in S$ mezők, hogy $c_1 = a$, $c_m = b$ és minden $1 \leq i \leq m-1$ esetén a c_i és c_{i+1} mezőknek van közös oldaluk.

T–4. Feladat

Legyen n egy pozitív egész szám. Egy kincsesládán $2n-1$ lakat van, amelyek 1-től $2n-1$-ig vannak beszámozva. Van összesen $n \cdot (2n-1)$ kulcs, mindegyik pontosan egy lakatot nyit. Minden $1 \leq i \leq 2n-1$ esetén az i-edik lakatot i darab kulcs nyitja. Ezek a kulcsok $2n-1$ ember közt vannak szétosztva úgy, hogy minden embernél n kulcs van (lehet több kulcs is egy embernél, amelyek ugyanazt a lakatot nyitják).

Határozzátok meg a legkisebb k pozitív egész számot, amelyre teljesül, hogy bárhogy is vannak szétosztva a kulcsok a $2n-1$ ember között, létezik egy k fős csoport, akik együtt ki tudják nyitni az összes lakatot.

T–5. Feladat

Legyen $ABCD$ egy húrtrapéz, amelyben $AD \parallel BC$ és $AD < BC$. Legyen O az ABC háromszög körülírt körének középpontja. Legyen X az a pont, amelyre BX egy átmérője az ABO háromszög körülírt körének, és legyen Y az a pont, amelyre CY egy átmérője az ACO háromszög körülírt körének.

Mutassátok meg, hogy az A, D, X és Y pontok egy körre esnek.

T–6. Feladat

Legyen ABC egy hegyesszögű háromszög. Legyen I_a az ABC háromszög A-val szemközti hozzáírt körének a középpontja. A D és E pontok rendre az I_aB és I_aC egyenesekre esnek úgy, hogy $DA = DB$ és $EA = EC$ teljesül. Az I_aDE háromszög körülírt köre a BC egyenest az F és G pontokban metszi ($F \neq G$). Bizonyítsátok be, hogy az ABC és AFG háromszögek körülírt körei érintik egymást.

Megjegyzés: Az ABC háromszög A-val szemközti hozzáírt köre az a kör, amely a háromszögön kívülre esik, érinti az AB és AC egyeneseket, és érinti a BC szakaszt.

T–7. Feladat

Legyen α egy pozitív racionális szám. Kezdetben egy táblára fel van írva a 2026-os szám. Minden egyes lépésben, ha épp az x szám van felírva a táblára, lecserélhetjük az alábbi számok valamelyikére:

i) $x + \alpha$,

ii) $x - \alpha$,

iii) $\frac{1}{x}$, ha $x \neq 0$.

Az y racionális számot *elérhetőnek* nevezzük, ha véges sok lépés után megjelenhet a táblán.

Határozzátok meg az összes α pozitív racionális számot, amelyre *minden* racionális szám elérhető.

T–8. Feladat

Határozzátok meg az összes olyan n pozitív egész számot, amelynek nincsen 2026-nál nagyobb prímosztója, és bárhogyan is választjuk ki az n számnak két *páratlan* és *relatív prím* pozitív osztóját, azok számtani közepe is osztója az n számnak.